

BULLETIN N° 192
ACADÉMIE EUROPEENNE
INTERDISCIPLINAIRE
DES SCIENCES



Lundi 2 février 2015 à 17h Maison de l'AX 5 rue Descartes 75005 Paris

Conférence du Pr Jean ZINN-JUSTIN

Membre de l'Académie des Sciences

Conseiller au CEA/

Institut de recherche sur les lois fondamentales de l'univers/IRFU Saclay

Président du Sénat Académique/comUE Université Paris-Saclay

"De la nature du vide: de Galilée à l'énergie noire"

Prochaine séance :

Lundi 2 mars 2015 à 17h Maison de l'AX 5 rue Descartes 75005 Paris

Conférence de Franck LALOË

Directeur de recherches émérite au Laboratoire Kastler Brossel de l'ENS

" La mécanique quantique: historique, interprétations "

Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences

Siège Social : Fondation de la Maison des Sciences de l'Homme 54, bd Raspail 75006 Paris

Nouveau Site Web : <http://www.science-inter.com>

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

FONDATION DE LA MAISON DES SCIENCES DE L'HOMME

PRESIDENT : Pr Victor MASTRANGELO
VICE PRESIDENT : Pr Jean-Pierre FRANÇOISE
SECRETAIRE GENERAL : Irène HERPE-LITWIN
TRESORIER GENERAL : Claude ELBAZ

MEMBRE S CONSULTATIFS DU CA :

Gilbert BELAUBRE
 François BEGON
 Bruno BLONDEL
 Michel GONDRAN

COMMISSION FINANCES: Claude ELBAZ,
COMMISSION MULTIMÉDIA: Pr. Alain CORDIER
COMMISSION EDITION: Robert FRANCK et Pr Pierre NABET
COMMISSION CANDIDATURES: Pr. Jean-Pierre FRANÇOISE

PRESIDENT FONDATEUR : Dr. Lucien LEVY (†)
PRESIDENT D'HONNEUR : Gilbert BELAUBRE
SECRETAIRE GENERAL D'HONNEUR : Pr. P. LIACOPOULOS (†)

CONSEILLERS SCIENTIFIQUES :
SCIENCES DE LA MATIERE : Pr. Gilles COHEN-TANNOUDI
SCIENCES DE LA VIE ET BIOTECHNIQUES :

CONSEILLERS SPECIAUX:

EDITION: Pr Robert FRANCK
AFFAIRES EUROPEENNES : Pr Jean SCHMETS
RELATIONS VILLE DE PARIS et IDF: Michel GONDRAN ex-Président
RELATIONS UNIVERSITES et MOYENS MULTIMEDIA: Pr Alain CORDIER
RELATIONS AX et MÉCENAT : Gilbert BELAUBRE

SECTION DE NANCY :
PRESIDENT : Pr Pierre NABET

février 2015

N°192

TABLE DES MATIERES

p. 03 Séance du lundi 2 février 2015
 p. 07 Annonces
 p. 08 Documents

Prochaine séance :

lundi 2 mars 2015 à 17h Maison de l'AX 5 rue Descartes 75005 Paris

Conférence de Franck LALOË

Directeur de recherches émérite au Laboratoire Kastler Brossel de l'ENS
" La mécanique quantique: historique, interprétations "

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

Fondation de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

Séance du Lundi 2 février 2015

Maison de l'AX 17h

La séance est ouverte à 17h **sous la Présidence de Victor MASTRANGELO** et en la présence de nos Collègues Gilbert BELAUBRE, Jean-Pierre BESSIS, Jean-Louis BOBIN, Alain CARDON, Juan-Carlos CHACHQUES, Gilles COHEN-TANNOUDJI, Ernesto DI MAURO, Claude ELBAZ, Michel GONDRAN, Irène HERPE-LITWIN, Gérard LEVY, Pierre MARCHAIS, Edith PERRIER, Jean SCHMETS, Alain STAHL, Jean-Pierre TREUIL.

Etaient excusés François BEGON, Bruno BLONDEL, Michel CABANAC, Alain CORDIER, Daniel COURGEAU, Françoise DUTHEIL, Vincent FLEURY, Jean -Pierre FRANCOISE, Robert FRANCK Jacques LEVY , Valérie LEFEVRE-SEGUIN, Antoine LONG, Claude MAURY, Pierre PESQUIES, Jean VERDETTI.

Etaient présents en tant qu'invités Marie-Josèphe MARTIN membre de l'UPS , Christian LARCHER professeur agrégé, de mathématiques et directeur des études au département GTR à l'IUT de Villetaneuse, et Alain SUARD ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

A. Conférence du Pr Jean ZINN-JUSTIN : "*De la nature du vide: de Galilée à l'énergie noire*"

1. Présentation du conférencier par notre Président Victor MASTRANGELO:

Après des études à l'École Polytechnique (1962-1964), Jean ZINN-JUSTIN a soutenu en 1968 une thèse de physique théorique à l'Université d'Orsay, préparée sous la direction de Marcel FROISSART titulaire de la Chaire de Physique des particules . Bien qu'ayant eu un poste permanent dans le groupe de physique théorique du CEA-Saclay de 1965 à 2003, il a aussi occupé des postes de visiteur dans diverses institutions :

- 1971-1972 chercheur associé à l'Université Stony-Brook (New York),
- 1974-1975 visiteur au CERN
- 1977-1978 Professeur invité à l'Université de Princeton,
- 1989-1990 Professeur invité et " Loeb Lecturer" à l'Université de Harvard,
- 1998-1999 Harris Visiting Scholar au M.I.T. et visiteur au M.I.T. et HARVARD

Il a été à la tête de divers organismes scientifiques tels que:

- de 1987 à 1995 l'Ecole d'été de Physique des Houches et coéditeur des Proceedings ,
- de 1993 à 1998 l'Institut de Physique théorique du CEA à Saclay,
- de 2003 à 2008 l'IRFU ex DAPNIA (Institut de Recherche sur les Lois Fondamentales de l'UNIVERS) à CEA Saclay
- depuis 2008 il est conseiller scientifique au CEA.
- Depuis 2010 il est Professeur associé à l'Université de Shangäi

- de 2013 à 2015 il a été élu Président du Sénat Académique de l' Université de Paris-Saclay.
- De 1996 à 2003 il a été chargé de cours à l'ENS Paris
- de 1999 à 2001 il a été Professeur de physique à l'Université de Cergy Pontoise
- de 2001 à 2008 il a été Professeur au département de mathématiques de l'Université Paris 7

Jean ZINN-JUSTIN a reçu, en autres, les prix GENTNER-KASTLER et HUMBOLT-GAY-LUSSAC. Il est docteur honoris causa de l'ETH de Zürich et membre associé de l'Académie des Sciences et Littérature de Mayence (Allemagne).

Il a contribué à de nombreuses tâches éditoriales :

- de 1979 à 1989 il a dirigé le Journal de Physique (Société Française de Physique)
- de 1977 à 2013 il a été Editeur associé du journal Nuclear Physics B
- de 1983 à 2011 il a été Editeur du Forstchrift der Physik ,
- de 1994 à 1999 il a été Editeur en chef du Journal of Physics A (IOPP° de l'Institut de physique anglais
- de 2001 à 2011 il a été Editeur associé au New Journal of Physics
- depuis 2009 il est éditeur au Scholarpedia. .

Il a été expert auprès de nombreux organismes internationaux:

- en 2002 Il a été organisateur de la Conférence Internationale de Physique théorique TH 2002 (Paris)
- de 2005 à 2011 il a été membre du comité scientifique du laboratoire INFN FRASCATI près de Rome
- de 2005 à 2009 Il a représenté les directions des Laboratoires européens au conseil du CERN concernant la stratégie européenne en matière de physique des particules.
- en 2006 il a présidé le comité d'évaluation du département de physique de l'Ecole Polytechnique de Zürich.
- de 2008 à 2013 il a été membre du comité d'évaluation du KEK (Centre d'Etude de Physique des Particules physiques du Japon)
- en 2009 membre du comité scientifique de l'IN2P3 du CNRS.
- Membre du Comité National des Grandes Structures de la Recherche au Ministère de la Recherche

Il est le lauréat de nombreuses distinctions:

- 1974 Prix PECCOT du Collège de France
- 1977 Prix LANGEVIN de la Société française de Physique
- 1981 Prix AMPERE de l'Académie des Sciences
- 1996 Prix GENTNER-KASTLER des sociétés françaises et allemandes de physique
- 1990 HARVARD -LOEB LECTURER
- 1998 M.I.T. Harris Visiting Scholar
- 2001 Schrödinger- Professor à l'Université de Vienne
- 2003 Prix HUMBOLT -GAY-LUSSAC (fondation Humbolt)
- 2013 Distinguished Israel POLLAK Lecturer au Technion (Institut Israélien de Technologie)

- 2010 Docteur honoris causa de l'Ecole Polytechnique de Zürich
- 2010 Correspondant de l'Académie des Sciences et Littérature de Mayence
- Elu le 15 mars 2011 Membre de l'Académie des Sciences

La majeure partie de ses travaux scientifiques est liée à la *théorie quantique des champs* et au *groupe de renormalisation* avec leurs applications aux transitions de phase en mécanique statistique et en physique des particules. En particulier, en collaboration avec B.W. LEE il a donné la première démonstration de la renormalisabilité des théories de jauge non-abéliennes dans la phase de symétrie brisée, une étape importante dans la construction du Modèle Standard des interactions faibles et électromagnétiques. Il s'est aussi intéressé aux propriétés des matrices aléatoires et la sommation des séries divergentes.

Il est l'auteur de nombreuses publications: Plus d'une centaine d'articles publiés dans des revues à comité de lecture, et 50 contributions dans des workshops, écoles d'été.

Il est également l'auteur de 3 livres :

- "*Quantum Field Theory and Critical Phenomena*" publié chez Oxford University Press
- "*Transition de Phase et Groupes de Renormalisation*" / "*Phase Transitions and Renormalization Group*" publié chez EDP sciences et Oxford Graduate Press
- "*Intégrale de Chemin en Mécanique quantique*" / "*Path Integrals in Quantum Mechanics*" publié chez EDP sciences et Oxford University Press

Il a dirigé 6 thèses de doctorat.

2. Résumé de la conférence:

Le Professeur ZINN-JUSTIN nous a confié le résumé suivant:

"De la nature du vide: de Galilée à l'énergie noire"

Quoique l'existence du vide ait déjà été un sujet de débat dans la Grèce antique, elle n'est devenue une question proprement scientifique qu'au dix-septième siècle avec des personnages comme Galilée ou Torricelli. Dans cet exposé nous essaierons de montrer que, sous des formes variées, l'existence et la nature du vide ont toujours été liées à des questions fondamentales de la science, autrefois par exemple à la présence de l'éther, aujourd'hui par exemple à la nature de la matière noire proposée pour expliquer la dynamique des galaxies ou de l'énergie noire qui influence l'expansion de l'univers.

3. compte-rendu de la conférence

Le compte-rendu complet de la conférence a fait l'objet d'une collaboration entre nos collègues Michel GONDRAN et Jean-Pierre TREUIL que nous remercions chaleureusement. Il sera accessible, ainsi que les diapositives de la conférence sur le site de l'AEIS <http://www.science-inter.com>

Après cette très riche séance, notre Président Victor MASTRANGELO en procède à la clôture .

Documents

Pour préparer la conférence de Franck LALOE nous vous proposons:

p.07 un article issu de la conférence de présentation du livre "Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique?" de Franck LALOE sur la radio France - Culture publié sur le site

<http://www.franceculture.fr/oeuvre-comprenons-nous-vraiment-la-mecanique-quantique-de-franck-laloe.html>

Pour compléter la conférence du Pr ZINN-JUSTIN nous vous proposons:

p 08 un article intitulé "*La Constante cosmologique*" proposé par Francis Bernardeau, et Jean-Philippe Uzan, publié sur le site <http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/couv-PDF/IdP2008/03-Bernardeau.pdf>

p 14 un article intitulé "*Les avatars de la Théorie pour une physique prédictive*" du PR ZINN-JUSTIN publié dans *CLEFS CEA - N° 47 - HIVER 2002-2003 sur*

http://www.cea.fr/content/download/2956/13837/file/039a41_Zinn.pdf

p. 17 un article intitulé "*Can dark energy emerge from quantum effects in a compact extra dimension?*" d' A. Dupays, B. Lamine, et A. Blanchard publié dans *Astronomy and Physics* chez EDP Sciences

p. 23 un article intitulé "*Critical Phenomena: field theoretical approach*" du Pr ZINN-JUSTIN publié dans http://www.scholarpedia.org/w/index.php?title=Critical_Phenomena:_field_theoretical_approach

Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique?

Ouvrage publié chez EDP SCIENCES par
Claude COHEN-TANNOUDJI et Franck LALOE

<http://www.franceculture.fr/sites/default/files/2011/09/19/4313565/images/m%C3%A9canique.jpg?13506>

[40458](#)

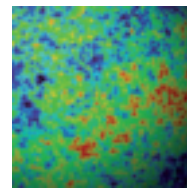
La mécanique quantique est à la base de notre compréhension actuelle des lois de la Nature, qu'elles s'appliquent à l'Univers entier, aux objets à notre échelle, ou microscopiques. Toujours vérifiée par l'expérience, elle a permis de nombreuses découvertes et la mise au point de nombreux dispositifs tels que les lasers, les transistors, les capteurs pour la photographie et la vidéo, etc.

Alors, pourquoi se poser la question « comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ? ». C'est qu'une bonne utilisation de la théorie ne signifie pas toujours une véritable compréhension. Le physicien qui prend du recul s'aperçoit parfois que le merveilleux outil intellectuel créé par les scientifiques semble parfois leur échapper, prenant une vie propre et mettant en lumière maints aspects inattendus que ses inventeurs n'avaient pas soupçonnés.

L'objet de ce livre est donc de discuter les fondements de la mécanique quantique. On y trouvera un exposé historique sur la naissance des concepts quantiques, leur développement, l'impact des idées de Bell et de son théorème, et leur application récente à de nombreux domaines. Un panorama général des différentes interprétations est présenté en dernière partie. L'ouvrage est accessible à toute personne ayant une formation scientifique générale. Si des équations mathématiques apparaissent parfois, les idées importantes sont contenues dans les commentaires et les figures, l'accent étant mis sur les idées et concepts généraux. Le spécialiste pourra cependant se reporter à une bibliographie très fournie.

Franck Laloë, Directeur de recherche émérite au CNRS au sein du laboratoire Kastler Brossel de l'École normale supérieure de Paris, l'un des laboratoires de physique quantique les plus prestigieux au monde, comme l'a montré l'attribution de deux prix Nobel. Avec Claude Cohen-Tannoudji et Bernard Diu, il est également co-auteur d'un ouvrage de mécanique quantique qui est devenu un classique dans les universités françaises et étrangères.

La constante cosmologique



Introduite « à tort » par Einstein comme une nouvelle constante fondamentale de la théorie de la gravitation pour pouvoir construire un modèle d'Univers statique, la constante cosmologique renaît de ses cendres il y a moins d'une dizaine d'années pour rendre compte d'observations cosmologiques robustes et variées. Entre-temps les théoriciens l'ont transformée en une énergie du vide et même en une énergie noire. Des observations plus précises pourraient éclairer ce qui est devenu un authentique problème de physique fondamentale.

L'histoire des sciences fournit de nombreux exemples de découvertes survenues pour des raisons qui ne sont plus considérées comme satisfaisantes. Ce pourrait être le cas de la constante cosmologique. Cette remarque de Georges Lemaître en 1949 résume à elle seule les avatars qu'a connus la constante cosmologique tout au long du vingtième siècle.

À l'origine, extension légitime de la relativité générale, elle est introduite par Albert Einstein comme une nouvelle constante fondamentale de la gravitation, au même titre que la constante de Newton, pour permettre la construction d'un modèle cosmologique statique. La découverte de l'expansion de l'Univers au début des années 30 ruine cette construction ; la possibilité d'une constante cosmologique n'en sera pas pour autant oubliée. Elle fait régulièrement surface au cours du vingtième siècle pour (r)accommoder des observations – celle de l'âge de l'Univers et de ses étoiles en particulier. Pourtant les constructions des théories quantiques des champs, de la théorie des supercordes, menées dans ce dernier quart de siècle, ont jeté un trouble sur la nature et l'existence même d'une telle constante. C'est la nature du vide qu'elle questionne – objet quantique ou objet classique ? – et ses effets sur la gravitation.

Loin d'être académique, ce débat est maintenant au cœur d'importants développements de cosmologie théorique et observationnelle. C'est que, depuis la fin des années 1990, époque à laquelle l'accélération de l'Univers a pu être mesurée explicitement, l'existence d'une constante cosmologique est une hypothèse incontournable de cosmologie observationnelle. Nous voilà ainsi contraints de revenir sur l'origine et les fondements du modèle cosmologique standard.

Origine cosmologique

En 1917, Albert Einstein travaille à l'élaboration du premier modèle cosmologique dans le cadre de la théorie de la relativité générale. Il veut donc déterminer la structure de l'espace-temps décrivant notre Univers à grande échelle. Deux hypothèses vont guider sa construction.

Il s'appuie d'abord sur le principe de Mach selon lequel l'origine de l'inertie est à rechercher dans l'ensemble des autres masses présentes dans l'Univers. Il est ainsi amené à supposer, ce qui est novateur à l'époque, que l'espace a un volume *fini* et qu'il a la topologie d'une 3-sphère. Par ailleurs, comme la plupart de ses contemporains, Einstein suppose que l'Univers est statique. À l'époque, les vitesses observées des étoiles proches sont faibles et l'identification des nébuleuses comme galaxies indépendantes, situées au-delà de notre Voie Lactée, ne se fera que dans le milieu des années 1920 ; il n'y a donc aucune raison de remettre en cause ce paradigme, fondement de la physique newtonienne.

Ces deux hypothèses ne sont cependant pas compatibles avec les équations de la relativité générale telles qu'Einstein les avait initialement écrites. Ainsi, afin de construire une solution décrivant un univers immuable et éternel, il doit introduire dans sa théorie de la gravitation un terme supplémentaire constant, compatible avec les principes de la relativité générale, la constante cosmologique.

Cette constante cosmologique, Λ , a la dimension de l'inverse d'une distance au carré, $\Lambda = 1/a_E^2$,

Article proposé par :

Francis Bernardeau, francis.bernardeau@cea.fr

Service de Physique Théorique, URA 2306, CNRS/CEA, Gif-sur-Yvette

Jean-Philippe Uzan, uzan@iap.fr

Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095, CNRS/UPMC, Paris



où a_E est le rayon de l'*univers d'Einstein*, c'est-à-dire le rayon de courbure de la 3-sphère décrivant l'espace. Les équations d'Einstein, qui relient la géométrie de l'espace-temps et son contenu en matière, impliquent alors que $\Lambda = 4\pi G_N \rho_{\text{mat}}$ où G_N est la constante de Newton et ρ_{mat} la densité d'énergie moyenne de la matière. Cette expression suggère donc que la constante cosmologique est une propriété de l'espace lui-même.

L'étude des solutions cosmologiques des équations d'Einstein se poursuit dans les années 1920. En 1922, Friedmann démontre que si la matière est répartie de façon homogène et isotrope aux grandes échelles, alors les équations de la relativité générale sans constante cosmologique n'admettent que des solutions qui ne sont pas statiques. En 1927, Lemaître démontre que l'espace d'Einstein n'est pas stable, car la moindre petite perturbation lui fait perdre son caractère statique. Il découvre indépendamment de Friedmann les solutions cosmologiques de la théorie de la relativité. Elles ne sont pas statiques, l'espace devrait donc être en expansion. Lemaître remarqua aussi une propriété générique de tous ces modèles : le spectre des galaxies lointaines doit être décalé vers le rouge, et cela d'autant plus que la galaxie est lointaine. Il s'agit de la prédiction de la première signature observationnelle de l'expansion cosmique.

Le débat sera momentanément tranché par les observations. En découvrant des céphéides (étoiles variables) dans la nébuleuse d'Andromède, Edwin Hubble montre dès 1924 que les « nébuleuses spirales » sont en fait d'autres galaxies. Il remarque ensuite, avec Milton Humason, que plus une galaxie est lointaine plus sa vitesse de fuite radiale est grande, $v = H_0 d$. C'est la *loi de Hubble*, en accord avec les prédictions de Lemaître de 1927. La constante de proportionnalité, H_0 , entre les vitesses de fuite et la distance est la *constante de Hubble*.

La vérification observationnelle de la loi de Hubble et son explication cohérente dans le cadre de solutions cosmologiques non-statiques changèrent l'attitude des astronomes. Si l'espace n'est pas statique, la constante cosmologique perd sa raison d'être originelle ; elle est rejetée dès 1931 par son « inventeur », par souci de simplicité et d'économie.

Elle n'est cependant pas complètement oubliée. En effet, dans les modèles cosmologiques de Friedmann-Lemaître, la constante de Hubble H_0 représente le taux d'expansion de l'Univers aujourd'hui et permet de calculer l'âge dynamique de l'Univers. Les mesures initiales de Hubble et Humason indiquaient que $H_0 = 500$ km/s/Mpc ($1 \text{ pc} \simeq 3 \times 10^{16} \text{ m}$), ce qui menait à une estimation de l'âge de l'Univers de l'ordre de 2 milliards d'années, plus jeune même que la Terre. L'existence d'une constante cosmologique permet de résoudre ce paradoxe. Un univers fini, dont la section spatiale est une 3-sphère, avec une constante cosmologique, peut en effet présenter une expansion quasi gelée, proche du comportement du modèle d'Einstein, avant que l'expansion n'y reparte de façon exponentielle. Cet « univers hésitant », décrit par Lemaître lors de ses études systématiques, peut

ainsi rendre compte d'une valeur arbitrairement grande de la constante de Hubble.

Dans les décennies qui suivent, l'avenir de la constante cosmologique est en suspens. Il est lié à une détermination précise de la constante de Hubble.

C'est que la mesure de cette dernière est une entreprise délicate. Si, dans le principe, l'utilisation des céphéides comme chandelle standard est une méthode valable, son application ne va pas sans poser de sérieux problèmes. Longtemps, la communauté sera divisée entre les tenants d'une valeur haute de H_0 , de l'ordre de 100 km/s/Mpc, et les tenants d'une valeur basse, 50 km/s/Mpc. Il faudra attendre le milieu des années 1990 pour que le télescope spatial *Hubble* permette une détermination fiable de H_0 à 72 ± 8 km/s/Mpc. Notre Univers est donc plus âgé que celui de Hubble et Humason mais néanmoins encore un peu trop jeune au vu de ses plus vieilles étoiles, dont l'âge a été confirmé par les résultats du satellite *Hipparcos*, à peu près à la même époque.

Qui plus est, les mesures de plus en plus précises des grandes structures de l'Univers indiquent l'existence d'une quantité substantielle de matière noire non relativiste¹ (en anglais Cold Dark Matter, CDM), mais pas en quantité suffisante pour conférer à l'Univers sa densité critique (densité de matière totale telle que l'espace ait une géométrie spatiale euclidienne, comme le prédisent les théories de l'univers primordial telle que l'inflation). Ces différentes tensions ont conduit Jeremy Ostriker et Paul Steinhardt à formuler en 1995 le modèle concordant Λ -CDM : un univers à géométrie spatiale euclidienne dont la matière, composée de baryons à 20 % et de matière noire froide à 80 %, ne représente que 30 % de la densité d'énergie actuelle, les 70 % restants correspondant à la contribution de la constante cosmologique.

Devant l'énormité de la proposition et de ses implications, la communauté hésite à adopter ce modèle. Elle attend les résultats des mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique². Pourtant c'est d'un type d'expériences tout autre que viendront les données décisives. L'utilisation des chandelles standards pour mesurer les paramètres cosmologiques avait déjà été tentée – par exemple par comptage de galaxies – mais n'avait pas débouché sur des résultats concrets jusqu'à l'utilisation des supernovae de type Ia. C'est en s'appuyant sur les propriétés remarquables de ces dernières que deux équipes, le *Supernova Cosmology Project* et le *High-z Supernova Search Team*, montrent en 1999 par une mesure directe de l'évolution cosmologique de H que l'Univers récent est en accélération (voir l'article de N. Regnault « Supernovæ et énergie noire » dans ce même numéro). Le modèle concordant s'impose ; il sera magistralement confirmé par les mesures des anisotropies

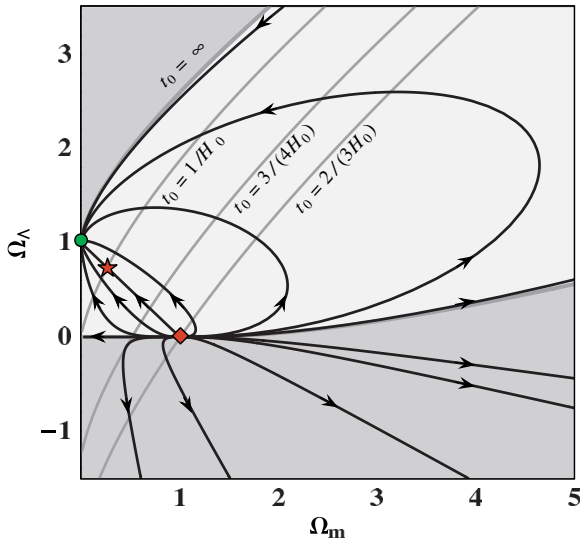
1. Constituée de particules animées de vitesses non relativistes.

2. Pour l'intérêt observationnel du fond diffus cosmologique dans le cadre de la cosmologie moderne, voir le dossier « Le rayonnement fossile à 3 K », C.R. Acad. Sci. (Paris) **4(8)** (2003).



Encadré 1

Les équations de Lemaître-Friedmann



Les équations de la relativité générale, appliquées à un milieu isotrope et homogène de densité d'énergie ρ et de pression P , conduisent aux équations suivantes :

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P)a + \frac{\Lambda a}{3} \quad (1)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho a^2 + \frac{\Lambda a^2}{3} - K, \quad (2)$$

où a est une fonction du temps qui caractérise la dilatation de l'espace.

Les solutions de ce système sont décrites sous forme d'un portrait de phase dans l'espace des paramètres réduits Ω_m et Ω_Λ , correspondant respectivement à la densité de matière – supposée sans pression – et à la constante cosmologique exprimés en unité de H^2 : $\Omega_m = 8\pi G_N \rho / (3H^2)$, $\Omega_\Lambda = \Lambda / (3H^2)$. La solution Einstein-de Sitter (espace plat sans constante cosmologique pour lequel le facteur d'échelle se comporte selon $a \propto t^{2/3}$) est représentée par le losange rouge ; l'espace de de Sitter (espace-temps dont l'expansion est dictée par $a = e^{Ht}$, avec H constant) par le disque vert. Cette dernière solution a été découverte par Willem de Sitter dès 1927. Tout comme la solution originale d'Einstein, elle fait intervenir la constante cosmologique mais ne contient aucune matière (cette solution était donc anti-machienne). Les lignes grises représentent des univers d'âge t_0 constant exprimé en fonction de la valeur actuelle de la constante de Hubble. La région grise du coin supérieur gauche correspond aux cas d'univers « sans big bang » ; la région grise du bas à des univers qui se recontractent sur eux-même en un « big-crunch ».

La solution originale d'Einstein (obtenue en annulant les termes de droite des équations (1) et (2)) correspond à un âge d'univers infini et à des paramètres cosmologiques réduits infinis. Notons tout de même que cette solution, tout comme la solution Einstein-de Sitter, est instable comme le suggèrent les trajectoires décrivant les solutions des équations de Friedmann.

Signalons enfin que l'étoile rouge de la figure représente la valeur des paramètres cosmologiques du modèle concordant.

de température du fond diffus cosmologique avec l'expérience Boomerang puis le satellite WMAP. Ces dernières observations permettent – dans un cadre théorique donné (les modèles de Friedmann-Lemaître) – d'estimer la valeur de la constante cosmologique à

$$\frac{\Lambda_0}{3H_0^2} = 0,72 \pm 0,05.$$

D'un point de vue de relativité générale, l'existence d'une telle constante fondamentale, à côté de la constante de Newton G_N , ne pose pas de problème de principe ; si ce n'est que ces deux constantes dimensionnées sont très disproportionnées. Ainsi l'échelle de longueur que l'on peut construire à partir de G_N , la longueur de Planck ℓ_P , est 10^{60} fois plus petite que la longueur associée à Λ , comparable à la taille de l'univers observable (environ 10^{26} m).

Mais un autre point de vue est possible. Il suit la voie ouverte par Lemaître dès 1933 quand il remarquait que la contribution de la constante cosmologique aux équations d'Einstein était équivalente à celle d'un fluide dont la pression serait l'opposé de sa densité d'énergie, $P = -\rho$, c'est-à-dire un fluide barotrope d'équation d'état $w = P/\rho = -1$.

Du vide cosmologique au vide quantique

De ce point de vue la constante cosmologique se comporte comme une densité d'énergie associée au vide. Si classiquement, on ne sait pas donner un sens à un niveau de densité d'énergie absolue, il n'en est pas de même en théorie quantique des champs. Là, le vide est défini comme l'état quantique qui a la particularité d'annuler tous les opérateurs d'annihilation des particules (libres) en présence. C'est donc *a priori* l'état de plus basse énergie. Pourtant la densité d'énergie dans un tel milieu n'est pas nulle. Celle-ci est un opérateur qui prend en compte les fluctuations quantiques des champs. La théorie quantique des champs donne les moyens de calculer ces contributions. Et si, pour tous les phénomènes autres que gravitationnels, cette énergie de point zéro n'a pas d'effet, ce n'est évidemment pas le cas en relativité générale, théorie où toute forme d'énergie engendre un champ gravitationnel...

Le premier à suspecter le difficile mariage de la mécanique quantique et de la relativité fut Wolfgang Pauli dès les années 1920. Pauli se demanda quel devait être l'effet gravitationnel de l'énergie du vide associé au champ de radia-



tion. Il calcula la valeur que le rayon de l'Univers d'Einstein aurait en tenant compte d'une telle densité d'énergie et conclut qu'« il ne pourrait pas atteindre la Lune ». Nous pouvons essayer de reconstituer le calcul de Pauli (qui ne l'a pas publié ; voir l'article de N. Strauman à ce sujet). En utilisant des unités naturelles, dans lesquelles les valeurs numériques de la vitesse de la lumière et de la constante de Planck réduite sont 1, l'énergie du vide (tenant compte uniquement des degrés de liberté du champ de radiation) est obtenue en sommant l'énergie fondamentale $\omega/2$ d'un ensemble d'oscillateurs quantiques :

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_{\text{vide}} &= 2 \int_0^{\omega_{\text{max}}} \frac{1}{2} \omega \frac{4\pi \omega^2 d\omega}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{\omega_{\text{max}}^4}{8\pi^2}. \end{aligned}$$

On n'obtient une densité d'énergie finie que parce que l'intégrale a été tronquée en imposant une borne supérieure aux fréquences. Choisissons celle qui est associée à la valeur classique du rayon de l'électron,

$$\omega_{\text{max}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{max}}} = \frac{2\pi m_e}{\alpha}$$

où α est la constante de structure fine ; on trouve que le rayon de l'Univers d'Einstein doit être de

$$a_E = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{G_N m_e} \frac{1}{m_e} \sim 31 \text{ km},$$

une valeur indubitablement plus petite que le rayon de l'orbite lunaire !

Mais il faudra attendre les années 1940 pour que les physiciens travaillant sur la théorie quantique des champs en donnent une formalisation satisfaisante – permettant de traiter des quantités divergentes – et la fin des années 1960 pour que le lien avec la relativité générale se renoue. Ainsi Yaacov Zel'dovich remarque que le vide, comme état quantique, doit posséder une symétrie de Lorentz, c'est-à-dire qu'il doit être le même pour tout observateur inertiel. Il s'ensuit que son équation d'état doit être $P/\rho = w_{\text{vide}} = -1$ et donc que sa densité d'énergie doit être constante au cours du temps, tout comme la constante cosmologique. Andreï Sakharov, reprenant les idées de Zel'dovich, propose à la même époque une ré-interprétation de la relativité générale comme théorie de l'élasticité du vide.

Il reste qu'on s'attend bien à ce que les fluctuations des champs dans le vide quantique contribuent à sa densité d'énergie, d'une manière tout à fait similaire à ce que Pauli imaginait. L'énergie du vide possède alors deux contributions : d'une part l'énergie de point zéro que nous venons d'évoquer et d'autre part une énergie potentielle qui caractérise l'interaction des champs – qui est d'ailleurs suscep-

ble d'être affectée par des effets de température finie. L'énumération des degrés de liberté des champs libres permet en principe de calculer la première contribution.

Dans le cadre du modèle standard de la physique des particules, la valeur de cette énergie du vide peut varier entre $\langle \rho \rangle_{\text{vac}}^{\text{EW}} \sim (200 \text{ GeV})^4$, et $\langle \rho \rangle_{\text{vac}}^{\text{Pl}} \sim (10^{18} \text{ GeV})^4$, selon que l'on fixe la coupure ω_{max} à l'échelle de l'unification électrofaible (EW) ou à l'échelle de Planck (Pl).

Le problème de la constante cosmologique

Ainsi le vide quantique se comporte, aux échelles macroscopiques, comme une constante cosmologique. Celle que l'on mesure a donc *a priori* deux contributions, la constante cosmologique que l'on peut librement introduire dans les équations d'Einstein, Λ_E , et celle associée à l'effet gravitationnel du vide quantique, $\Lambda_Q = 8\pi G_N \langle \rho \rangle_{\text{vide}}$. La valeur mesurée cosmologiquement est donc égale à

$$\Lambda_{\text{mes.}} = \Lambda_E + \Lambda_Q.$$

Pendant, comme les ordres de grandeur discutés précédemment nous l'ont montré, $\Lambda_{\text{mes.}}$ est très petit comparé à Λ_Q . Il faut donc que Λ_E compense Λ_Q , malheureusement pas exactement mais de telle sorte que $\Lambda_E + \Lambda_Q \simeq 10^{-60} \Lambda_Q$. Un réglage si fin entre les valeurs de deux quantités qui *a priori* n'ont pas une origine commune semble inexplicable. De plus, sans une telle quasi-annulation, l'expansion de l'Univers serait entrée dans une phase accélérée bien avant la formation des galaxies, en forte contradiction avec leur existence. Tel est le *problème de la constante cosmologique*.

Comment résoudre ce problème ? Une issue serait d'envisager qu'un mécanisme d'annulation diminue considérablement la valeur de la constante cosmologique. On remarqua très tôt que la théorie quantique prévoit que les fermions (particules de spin demi-entier, comme l'électron) ont une contribution positive à l'énergie du vide alors que celle des bosons (particules de spin entier, comme le photon) est négative. Ces deux contributions peuvent-elles se compenser pour ne laisser qu'une valeur résiduelle compatible avec les observations ?

Malheureusement, dans le modèle standard de la physique des particules, les contributions des fermions ne permettent ni une annulation ni même une diminution notable de la valeur de l'énergie du vide, car il existe plus de fermions que de bosons. On a cru trouver l'explication d'une annulation exacte en invoquant la supersymétrie, une symétrie hypothétique associant un boson à chaque fermion, si bien que la contribution de tous les champs quantiques à l'énergie du vide s'annulerait exactement. Si une telle symétrie existe dans la nature, elle ne peut malheureusement être satisfaite qu'à haute énergie.



Ainsi, quel que soit le mécanisme d'annulation invoqué, il est très difficile de comprendre l'origine du minuscule résidu de la constante cosmologique observée. Un tel ajustement fin, même si il est mathématiquement possible, demeure physiquement difficilement concevable.

À ce problème, il existe une ultime voie de sortie. Elle repose sur le principe anthropique – tout observateur doit se trouver dans un univers où la valeur de la constante cosmologique est suffisamment faible pour que puisse se former des grandes structures, des galaxies, et finalement des astronomes – et sur le fait que la constante cosmologique pourrait être une quantité aléatoire – dans un paysage stochastique extrêmement complexe, comme suggéré par des extrapolations de la théorie des cordes. C'est l'idée proposée par Steven Weinberg en 1987. Mais il faut bien reconnaître qu'on peut légitimement être réticent à adopter un tel paradigme qui n'offre aucun moyen de falsification.

D'un problème, deux problèmes

Une voie plus prometteuse serait de supposer qu'il existe un mécanisme d'annulation exacte – qu'une théorie complète de la gravité quantique permettra peut-être de mettre au jour – et de voir dans l'accélération cosmique observée l'effet d'une nouvelle composante du fluide cosmique. Ce serait une forme d'énergie encore inconnue, de pression négative, distribuée de façon (quasi) homogène dans l'univers observable.

Les modèles s'efforçant de décrire cette énergie noire foisonnent. Aucun n'est pourtant exempt de difficultés conceptuelles – celle par exemple de postuler l'existence d'un champ de masse extrêmement faible ; aucun ne résout non plus vraiment le *problème de coïncidence*, le fait que cette énergie noire se mette à dominer le contenu matériel de l'Univers précisément maintenant. Il reste que ces modèles offrent la possibilité d'être testés observationnellement : l'énergie noire étant un objet dynamique, son équation d'état est susceptible d'évoluer avec le temps. On comprend l'engouement d'une partie de la communauté des astrophysiciens pour les expériences cherchant à mesurer cette équation d'état. Si la prochaine génération d'expériences devait mettre en évidence une équation d'état différente de $P = -\rho$, ce serait une découverte majeure, tant pour la cosmologie que pour la physique fondamentale dans son ensemble.

Pourtant, le fait qu'une simple constante cosmologique soit un cas limite de ces familles de modèles doit nous inciter à la prudence. Car l'enjeu est tel que d'autres aspects de la construction du modèle standard de la cosmologie sont susceptibles d'être révisés.

C'est d'abord l'application même de la relativité générale qu'on peut mettre en question. Après tout, celle-ci n'a été effectivement testée avec précision qu'à des échelles bien plus petites – celles de notre système solaire – que le rayon de Hubble. Certains de ces tests peuvent être généralisés

aux échelles cosmologiques, et en particulier le test historique de la déflexion de la lumière. Si l'éclipse du 29 mai 1919 a permis de vérifier les prédictions de la relativité générale, c'est que les deux termes de l'équation de Poisson (qui relie le potentiel gravitationnel à la quantité de matière qui l'engendre) ont pu être mesurés séparément : la masse du soleil à partir du mouvement des planètes ; le potentiel gravitationnel à l'aide de la mesure de la déflexion de la lumière d'une étoile. En cosmologie, on commence seulement à envisager de pouvoir mettre en œuvre ce test. Nous en avons esquissé la méthode en 2001 en remarquant que les mesures de distorsions gravitationnelles faibles – telles qu'elles sont faites auprès du télescope CFHT – et les grands relevés extragalactiques permettaient de contrôler la validité de l'équation de Poisson à des échelles de l'ordre de 100 Mpc.

Inutile de dire qu'invalider la relativité générale aux échelles cosmologiques serait un résultat majeur que seules des théories comme la théorie des supercordes, ou la gravité quantique, seraient susceptibles d'appréhender.

Remarquons encore que les évidences observationnelles de l'accélération de l'Univers s'appuient sur une autre hypothèse qu'on peut aussi être tenté de remettre en cause : le principe cosmologique, et plus précisément le principe copernicien. Ce dernier suppose que l'on ne doit pas occuper une position privilégiée dans l'Univers. Avec l'observation de l'isotropie statistique de l'Univers, il implique le principe cosmologique : l'Univers est – au moins statistiquement – isotrope et homogène. Sans introduire de constante cosmologique, sans changer les lois de la gravité, mais en renonçant au principe copernicien on peut rendre compte des observations. Il faut pour cela supposer que nous vivons au cœur d'une grande région de faible densité.

On a cru pendant longtemps qu'il était impossible de tester ce principe : il aurait fallu pour cela observer l'Univers depuis différentes positions de l'espace-temps. En janvier 2008, l'un d'entre nous a cependant remarqué que l'on pouvait utiliser le fait que le décalage spectral de tout objet lointain, dans un espace en expansion, dérive avec le temps. Cette évolution temporelle est liée au taux d'expansion de l'Univers. Son amplitude est certes infime : sur une période de 10 ans, le décalage spectral d'un objet situé à une trentaine de milliards d'années-lumière changera d'environ 10^{-8} %, et avec les moyens observationnels actuels un tel signal est indétectable. Mais de nouveaux projets, tels que l'Extremely Large Telescope, un télescope de 80 mètres de diamètre, et son spectrographe haute-résolution, pourraient rendre un tel signal accessible d'ici 10 ou 15 ans (en s'appuyant sur une campagne observationnelle elle-même étalée sur une dizaine d'années...). Et c'est la confrontation de la dérive temporelle de tels objets avec leur distance de luminosité³ qui permettrait de tester le principe copernicien.

3. Distance déduite de la luminosité apparente d'un objet, qui peut différer de la distance déduite de sa dimension angulaire.



Conclusion

L'observation de l'expansion accélérée de l'Univers avec ses implications est un authentique problème de physique fondamentale. Celui-ci nous force à reconsidérer l'ensemble des hypothèses menant à la construction du modèle standard de la cosmologie. Il apparaît, et c'est extrêmement rassurant, que même les plus fondamentales de ces hypothèses – validité de la relativité générale aux échelles cosmologiques, principe copernicien – pourraient être testées dans les prochaines années. Ces tests changeront peut-être radicalement notre perception de l'Univers ou amèneront à la détection d'un nouveau fluide cosmologique.

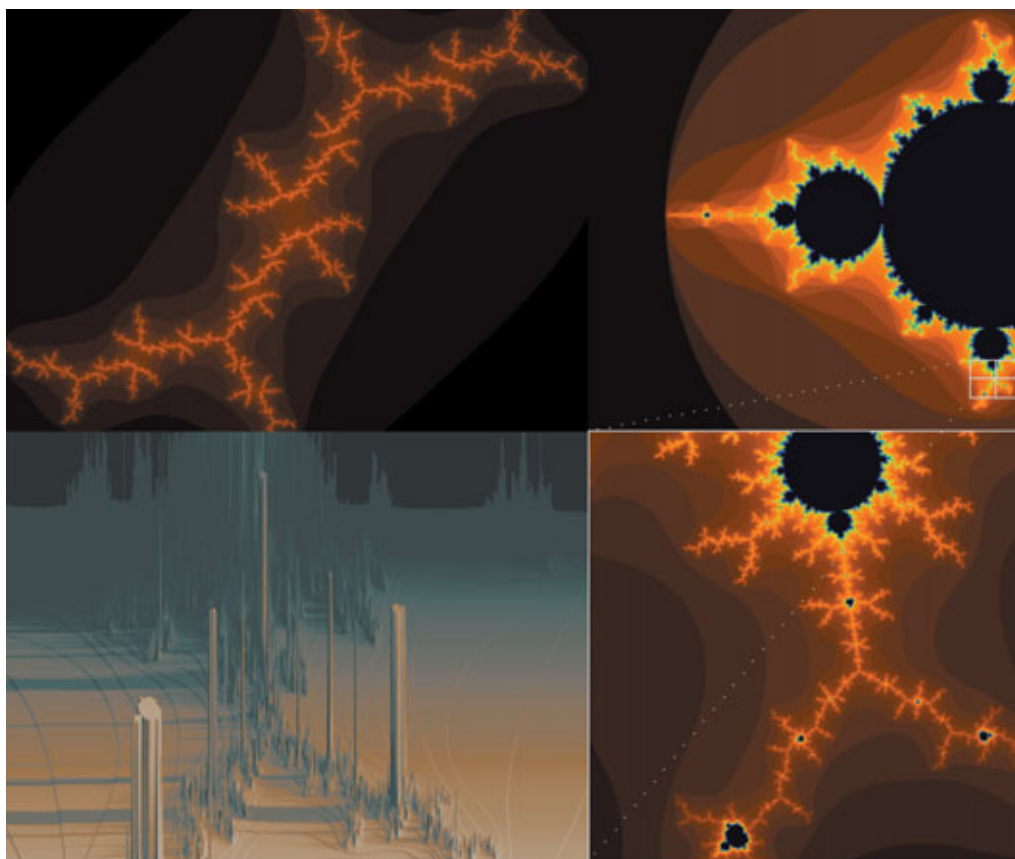
Et si tel est le cas c'est, comme on l'a vu, un coin du voile sur la relation entre gravité et mécanique quantique qui pourrait être levé dans les prochaines années.

POUR EN SAVOIR PLUS

- Bernardeau F., « Cosmologie », *EDP Sciences*, 2008.
- Misner C. W., Thorne K. S. et Wheeler J. A., *Gravitation*, *Freeman*, 1972.
- Peter P. et Uzan J.-P. « Cosmologie primordiale », *Belin*, 2005.
- Strauman N., « Wolfgang Pauli and modern physics », arXiv: 0810.2213
- Uzan J.-P., « The acceleration of the universe and the physics behind it », *Grav. Relat Gen.*, 39, 2007.307.
- Uzan J.-P. et Bernardeau F., « Lensing at cosmological scales: a test of higher dimensional gravity », *Phys. Rev. D*, 64, 2001, 083004.
- Uzan J.-P., Clarkson C., et Ellis G.F.R., « Time drift of cosmological redshifts as a test of the Copernican principle », *Phys. Rev. Lett.*, 100, 2008.191303.

LES AVATARS DE LA THÉORIE POUR UNE PHYSIQUE PRÉDICTIVE

Qu'elle précède ou suive l'expérience, la théorie doit, dans le domaine de la physique, procéder de manière plus ou moins provisoire à certaines simplifications. C'est à ce prix qu'elle s'avère prédictive pratiquement à un moment donné. En particulier, elle doit identifier tous les paramètres importants qui permettent de décrire les phénomènes à une échelle donnée. Ce sont les avatars nouveaux de cette idée qu'illustre par exemple, en physique des particules, la théorie quantique des champs et qui conduit à la notion de théorie effective.



Jean-Francois Colonna (CMAP/Ecole polytechnique, FT R&D).

Illustration des effets du découplage des échelles. Si l'agrandissement itératif d'un segment de droite imprimé ne fait apparaître des détails supplémentaires que si les défauts de l'impression deviennent apparents, une image géométrique fractale (intitulée ici Le long de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot), sans découplage des échelles, construite itérativement, apparaît différente à chaque grossissement, avec toujours plus de détails (reprenant en l'occurrence le même motif, comme indiqué à droite). Il y a là l'équivalent du groupe de renormalisation. L'algorithme dit comment passer d'une échelle à la suivante : à un grossissement donné, on peut parler d'image effective. L'image en bas à gauche est une vue 3D du même motif.



Au xx^e siècle, dans deux domaines distincts de la physique, la théorie des interactions fondamentales⁽¹⁾ et la mécanique statistique des transitions de phase, une des idées fondamentales de la physique a été remise en cause : le *découplage des échelles*. Prenons deux exemples pour illustrer cette idée. Une simple analyse dimensionnelle montre que la période d'un pendule varie comme la racine carrée de sa longueur. Ce résultat repose en fait sur l'hypothèse que d'autres longueurs, comme la taille des atomes qui composent le pendule ou le rayon de la Terre, n'interviennent pas, car respectivement beaucoup trop petite ou trop grande. De même pouvons-nous calculer les trajectoires des planètes, avec une très bonne approximation, en supposant que les planètes et le Soleil sont des points matériels, car leurs rayons sont beaucoup plus petits que les tailles des orbites.

Il est bien clair que si cette propriété de découplage n'était pas généralement vraie, une physique prédictive serait pratiquement impossible.

La théorie des interactions fondamentales

Dans les années trente, les premiers calculs d'électrodynamique quantique⁽¹⁾ se heurtèrent à des problèmes apparemment insurmontables : beaucoup de résultats étaient infinis et ces infinis étaient directement liés à la nature ponctuelle de l'électron. Il apparut rapidement que ces infinis avaient un caractère fondamental, paraissant une conséquence inévitable du caractère ponctuel des particules et de la conservation des probabilités.

Une solution empirique à ce problème, appelée *renormalisation*, fut cependant trouvée. Elle consistait à exprimer les quantités mesurables non pas en termes des paramètres initiaux de la théorie, comme la charge de l'électron en l'absence d'interactions, mais en termes de quantités renormalisées comme la charge de l'électron observée. Les résultats obtenus par cette méthode furent ensuite confirmés, de façon spectaculaire, par l'expérience.

A priori, cette méthode apparaît comme une application du principe habituel : utiliser des paramètres adaptés à l'échelle d'observation. Toutefois, dans ce cadre, trois bizarreries apparaissaient : la relation infinie entre paramètres initiaux et paramètres observés, la nécessité, pour que la méthode de renormalisation marche, d'introduire parfois des interactions supplémentaires non anticipées et enfin la propriété que l'intensité des interactions dépendait de l'échelle

(1) Voir à ce sujet *Clefs CEA* n° 36 p. 24.

Le pendule de Foucault au Panthéon. Pour aboutir au résultat que la période d'un pendule varie comme la racine carrée de sa longueur, il a fallu faire l'hypothèse que d'autres longueurs, comme la taille des atomes qui composent le pendule ou le rayon de la Terre, n'interviennent pas car, respectivement, beaucoup trop petite ou trop grande.



Palais de la Découverte

d'observation. Par exemple, pour des distances plus petites que la longueur d'onde de l'électron, la théorie prédit un phénomène "d'anti-écranage". Ce phénomène a été vérifié plus tard de façon très directe à haute énergie, c'est-à-dire à courte distance : la charge de l'électron observée à une énergie de 100 GeV, qui correspond à la masse de la particule Z, est augmentée de 4 % par rapport à sa valeur "habituelle", qui est la charge coulombienne.

Phénomènes critiques et théorie gaussienne

La théorie des phénomènes critiques a comme objet la description des transitions de phase continues ou du second ordre dans les systèmes macroscopiques, comme la transition liquide-vapeur, les transitions dans les mélanges binaires, l'hélium superfluide, les systèmes magnétiques. Ces transitions sont

caractérisées par des comportements collectifs à grande échelle près de la température de transition (la température critique T_c). On s'attend alors à ce que ces comportements puissent faire l'objet d'une description macroscopique, ne faisant intervenir qu'un petit nombre de paramètres adaptés à cette échelle, sans référence explicite aux paramètres microscopiques initiaux ou à l'échelle microscopique initiale comme la taille des atomes, la maille des cristaux ou la portée des forces. Cette idée conduit à une théorie gaussienne (pour des raisons analogues au théorème de la limite centrale de la théorie des probabilités).

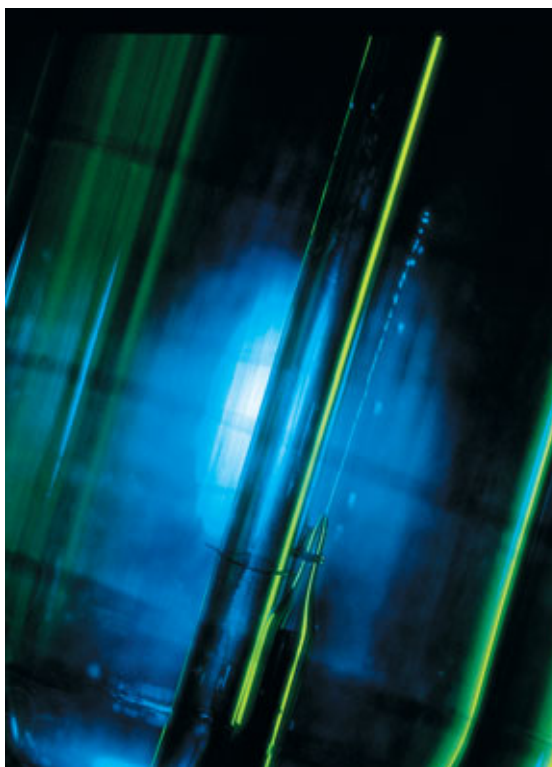
Aussi les physiciens furent-ils très surpris du désaccord de cette théorie aussi bien avec l'expérience qu'avec des calculs de modèles de mécanique statistique sur réseau. L'échec de la théorie gaussienne démontrait que les propriétés macroscopiques ne pouvaient pas être calculées en ignorant complètement l'échelle microscopique. En fait, un calcul des corrections à la théorie gaussienne fait apparaître des infinis à la température critique. Les divergences rencontrées dans la théorie des champs de la physique des particules et la théorie des phénomènes critiques ont en fait une origine commune : le non-découplage des différentes échelles de physique. Les infinis apparaissent quand on essaie d'ignorer, comme on en a l'habitude, et comme il est généralement justifié, l'existence d'une échelle de physique microscopique sous-jacente.

Universalité et groupe de renormalisation

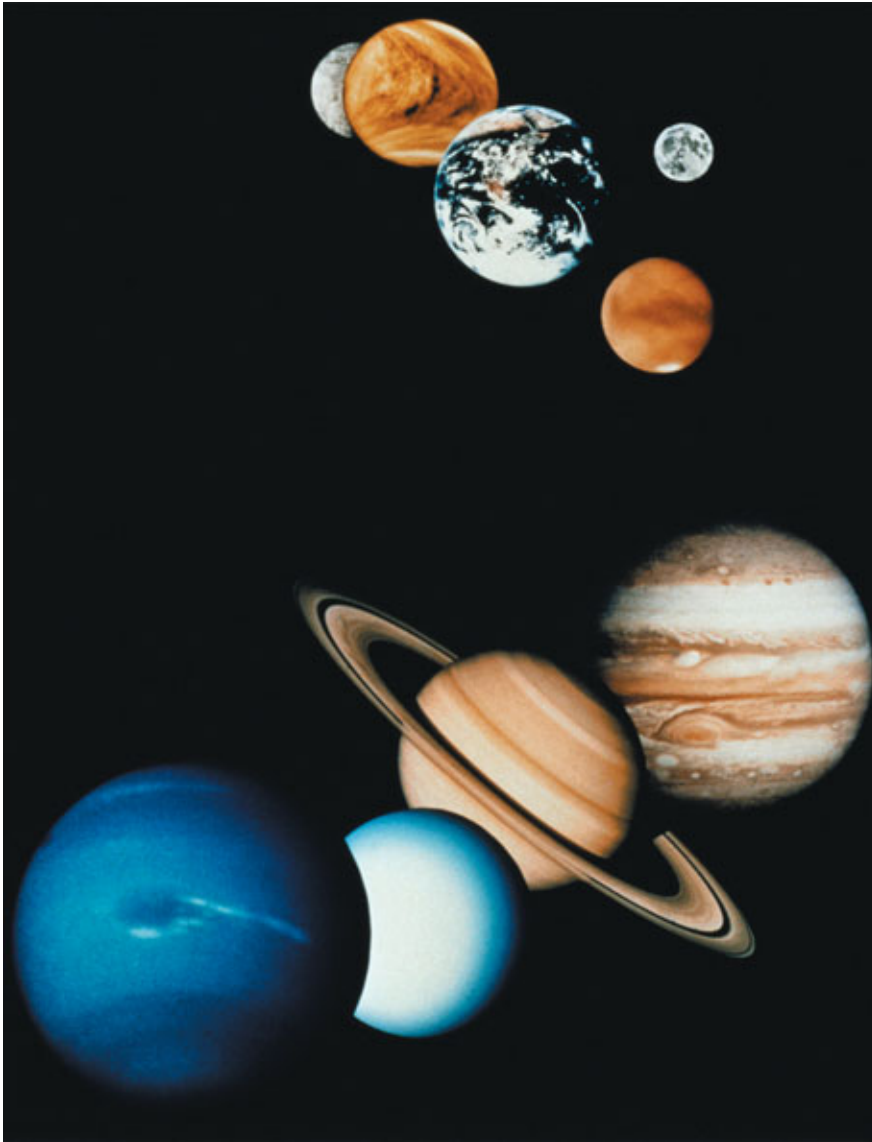
On aurait pu craindre dans ces conditions que la physique macroscopique soit sensible à toute la structure de courte distance, que les phénomènes à grande distance dépendent de la dynamique microscopique détaillée, et donc soient essentiellement imprédictibles. En fait il fut découvert empiriquement que seule l'échelle de distance associée aux interactions microscopiques et certaines de leurs caractéristiques générales étaient importantes, une propriété appelée *universalité*. La survivance d'une universalité, même réduite par rapport à la théorie gaussienne, était encore plus surprenante.

Pour comprendre toutes ces observations, un nouveau cadre conceptuel fut inventé : le *groupe de renormalisation*. Il est difficile de le décrire ici précisément, mais l'idée essentielle est la suivante : on construit une équation d'évolution pour la variation des interactions en fonction de l'échelle d'observation. On se donne comme condition initiale les interactions microscopiques et on recherche les interactions *effectives* à plus grande distance. Si l'équation d'évolution a des propriétés de point fixe, c'est-à-dire que pour

Effet fontaine de l'hélium superfluide. C'est l'exemple d'un phénomène dont les propriétés à l'échelle macroscopique ne peuvent pas être calculées en ignorant complètement l'échelle microscopique.



CEA/Oasis/D. Chaslerie



PhotoDisc/StockTrek

Les planètes du système solaire regroupées. Leurs trajectoires ont été calculées en supposant qu'il s'agissait de points matériels car leurs rayons sont minuscules par rapport à la taille de leurs orbites.



toute une classe d'interactions initiales on obtient les mêmes interactions effectives à grande distance, alors la propriété d'universalité peut être expliquée.

Cette stratégie a permis alors d'expliquer toutes les propriétés des transitions de phase simples. Mais elle a établi de façon remarquable une relation entre théorie des interactions fondamentales et transitions de phase : la théorie effective qui décrit les phénomènes critiques à grande distance est une *théorie quantique des champs* du genre de celle qui décrit la physique des particules.

Il devient alors difficile de résister à la tentation d'appliquer les mêmes idées à la théorie des interactions fondamentales.

Théories quantiques des champs effectives

On peut maintenant imaginer que les interactions fondamentales sont décrites à l'échelle microscopique (bien sûr microscopique, comme la longueur de Planck⁽²⁾, par rapport aux échelles de distance actuelle-

ment expérimentalement accessibles), c'est-à-dire à très grande énergie, par une théorie finie de nature inconnue (la *théorie des cordes* ?). Pour des raisons qui restent à comprendre, elle engendre, par l'effet coopératif d'un grand nombre de degrés de liberté, une physique de grande distance avec des particules de très faible masse (par rapport à la masse de Planck⁽²⁾, 10^{19} GeV).

À des distances un peu supérieures à l'échelle microscopique, la physique est décrite par une théorie des champs très compliquée avec un nombre infini d'interactions, dont les intensités évoluent avec la distance. Conséquence de l'existence d'un point fixe de longue distance, la plupart des interactions, décroissent alors rapidement et deviennent négligeables à grande distance (une seule conduit néanmoins à des effets importants, la gravité, à cause de son caractère cumulatif et attractif). Des interactions en nombre fini

(2) Dimensions limites inférieures de la Nature selon la physique quantique.

évoluent lentement (de façon logarithmique) et survivent à longue distance. Elles conduisent au *modèle standard* qui décrit presque toute la physique des particules accessible⁽¹⁾. Enfin, certains paramètres peuvent croître avec la distance. Par exemple, on s'attendrait dans le modèle standard à ce que la masse de la particule de Higgs⁽¹⁾ soit voisine de la masse de Planck, une masse incompatible avec la physique observée. Il s'agit là d'un problème non résolu appelé problème de l'*ajustage fin*⁽¹⁾. Une hypothétique supersymétrie⁽¹⁾ est une des solutions proposées. Ce point de vue moderne, profondément basé sur le groupe de renormalisation et la notion d'interactions dépendant de l'échelle d'observation, non seulement procure une image plus cohérente de la théorie quantique des champs, mais donne également un cadre dans lequel de nouveaux phénomènes peuvent être discutés.

Il implique aussi que la théorie quantique des champs est une description temporaire, qui n'est pas nécessairement cohérente à toutes les échelles, et destinée à être finalement remplacée par une théorie plus fondamentale de nature radicalement différente. Il faut néanmoins souligner que la théorie quantique des champs reste, pour l'instant, le cadre le plus fécond pour l'étude de beaucoup de problèmes en physique où un nombre très grand de degrés de liberté interagissent fortement. ●

Jean Zinn-Justin

Direction des sciences de la matière
CEA centre de Saclay

Can dark energy emerge from quantum effects in a compact extra dimension?

A. Dupays^{1,4,5}, B. Lamine^{2,3,4,5}, and A. Blanchard^{4,5}

¹ Université de Toulouse, UPS, Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité, IRSAMC, 31062 Toulouse, France

² Université Pierre et Marie Curie, UPMC, ENS, Laboratoire Kastler Brossel, 75252 Paris Cedex 05, France

³ CNRS, UMR 8552, 75252 Paris, France

⁴ Université de Toulouse, UPS-OMP, IRAP, 31400 Toulouse, France

e-mail: brahim.lamine@irap.omp.eu

⁵ CNRS, IRAP, 14, avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

Received 8 January 2013 / Accepted 17 April 2013

ABSTRACT

The origin of the accelerated expansion of the universe is a major problem in both modern cosmology and theoretical physics. In quantum field theory, simple estimations of the vacuum contribution to the density energy of the Universe are known to lead to catastrophically high values compared to observations. A gravitational Casimir effect from an additional compact dimension of space is known to lead to an effective cosmological constant. Nevertheless, such a contribution by itself is usually not regarded as a plausible source for accelerating the expansion, given the constraints on such scenarios. Here, we propose that the Casimir vacuum contribution of the gravitational field actually provides a low positive value to the density energy of the universe. The key new ingredient is to assume that only modes with shorter wavelengths than the Hubble radius contribute to the vacuum energy. Such a contribution gives a positive energy density, has a naturally Lorentz invariant equation of state in the usual 4D spacetime, and can thus be interpreted as a cosmological constant. Its value agrees with observations for a radius of a fifth extra dimension given by $35\ \mu\text{m}$. The implied modification of the gravitational inverse square law is close but below existing limits from experiments testing gravity at short range.

Key words. gravitation – dark energy – cosmology: theory

1. Introduction

The evidence of the accelerated expansion of the universe has grown since the first result from the Hubble diagram of distant type Ia supernovae (Riess et al. 1998; Perlmutter et al. 1999). The angular power spectrum of the fluctuations in the cosmic microwave background and the large-scale properties of the galaxy distribution are all consistent with the accelerated expansion of a homogenous universe, while no alternative Friedmann-Lemaître model seems to be able to reproduce these three data sets (Frieman et al. 2008; Blanchard 2010). Dark energy, the origin of the cosmic acceleration, is often qualified as one of the deepest mysteries in modern physics, and its origin is hard to explain within the standard framework of high-energy physics (Weinberg 1989). This issue has been a tremendous stimulation for the community, producing a rich ensemble of theoretical approaches, while being the target of unprecedented efforts in astrophysical observational strategy, either in the form of ground projects (LSST Science Collaborations et al. 2009) or ambitious space projects like EUCLID (Laureijs et al. 2011).

A genuine cosmological constant Λ , as introduced by Einstein in 1917, accounts for the observed cosmic acceleration. However, most scientists agree on the lack of theoretical motivation for introducing such a term into the Einstein equations (Amendola et al. 2012). One reason that is often invoked is that Λ introduces a new fundamental energy scale if one introduces the Planck constant \hbar :

$$E_\Lambda = ((\hbar c)^3 \rho_\Lambda)^{1/4} \simeq 2\ \text{meV}, \quad (1)$$

with $\rho_\Lambda = \Lambda c^4 / (8\pi G)$ representing 73 % of the energy content of the Universe. On this energy scale, no exotic physics are a priori expected. Equivalently, a dimensional length scale can be associated:

$$\ell_\Lambda = \left(\frac{\hbar c}{\rho_\Lambda} \right)^{1/4} \simeq 83\ \mu\text{m}. \quad (2)$$

An experimental effort has been devoted to observing any deviation from the gravitational laws (Adelberger et al. 2009) on this scale and below. No anomaly has been observed just below this length scale (Kapner et al. 2007). Of course, as we are going to see, this does not exclude any deviation in the gravitational laws controlled by ℓ_Λ , because numerical factors could lower the true length scale to a value below ℓ_Λ . Finally, we need to mention that if Λ is a true fundamental constant, then it is not possible to define a single natural length scale from \hbar , c , G , and Λ , but instead one can have

$$\ell = \Lambda^{-1/2} f \left(\frac{\hbar G \Lambda}{c^3} \right) \quad (3)$$

with f an arbitrary function of the dimensionless constant $\frac{\hbar G \Lambda}{c^3} \sim 2 \times 10^{-122}$. This low a number is nothing more than a reformulation of the cosmological constant problem. Taking $f(x) = 1$ leads to a cosmological scale for ℓ (the size of a static Einstein universe), and $f(x) = \sqrt{x}$ leads to the Planck length, while $f(x) = x^{1/4}$ gives the previously introduced scale ℓ_Λ , qualified as the natural dark-energy length scale. This scale is the geometric mean of the two former scales.

Historically, a physical explanation for the cosmological constant came from identification of this term with a Lorentz invariant vacuum (Lemaître 1934), which leads to the possibility of a gravitationally active vacuum due to the contribution of zero-point energy. This attractive idea was discussed as early as in the 1920s by Nernst and Pauli (see Straumann 2002; Peebles & Ratra 2003; Kragh 2011 for a historical presentation) but it was immediately realized that this possibility is plagued by a large discrepancy in the estimated order of magnitude. To avoid dramatic consequences for cosmology, it is usually assumed that those vacuum energies do not gravitate or give a renormalized value that is exactly zero. This is the first cosmological constant problem. We are therefore left with the second cosmological problem of how to explain the low “incremental” positive value observed today. A first original idea has been historically proposed in Zel’Dovich (1967); Zel’dovich (1968), considering ρ_Λ as being gravitational interaction energy between virtual pairs of the quantum electrodynamic (QED) vacuum. Unfortunately, this elegant proposition could still not explain the low value of the possible cosmological constant. Nowadays, the actual contribution of vacuum to the present-day density of the universe is still the subject of debate in the scientific community.

Here, we focus on the possibility of identifying the cosmological constant with effects from the quantum vacuum. In Sect. 2, we briefly discuss the vacuum contribution problem. In four-dimensional spacetime, it can be argued that this contribution vanishes for a massless field, while for a massive field the expected contribution is much greater than the observed one for any standard fundamental mass scale unless fine tuning is invoked. In Sect. 3, we examine the case of adding extra spatial compact dimensions. Indeed, pioneer papers in the 80s (Appelquist & Chodos 1983b,a) computed the quantum corrections in the energy density of the vacuum stemming from the presence of such extra dimensions. It has been shown that those quantum corrections correspond to a Casimir effect of the gravitational field induced by the periodic boundary conditions along the extra compact dimensions (Rohrlich 1984), but direct identification of this quantum correction with the cosmological constant (Milton 2001; Gardner 2002; Elizalde 2006b) encountered some difficulties that we recall briefly later. However, we show that including the Hubble scale as a maximum wavelength allowed for quantum vacuum modes of the gravitational field provides a mechanism to generate a positive cosmological constant with one extra dimension. We furthermore show that such a scenario leads to a modification of the gravitational inverse square law on scales that should be accessible by experiments in the near future.

2. The zero-point energy contribution to the vacuum

Considering the example of a massive scalar field, the contribution of zero-point energy to the density can be obtained as the vacuum expectation value of the 00 component of the energy momentum tensor $T^{\mu\nu}$ ($\hbar = c = 1$)

$$\rho_v = \langle 0|T^{00}|0\rangle = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (4)$$

with d the number of spatial dimensions and \mathbf{k} the wave vector. The vacuum pressure can be computed in a similar way to the density:

$$p_v = (1/d) \sum_i \langle 0|T^{ii}|0\rangle = \frac{1}{d} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}. \quad (5)$$

These contributions are highly divergent and therefore need some regularization treatment. The most trivial regularization procedure would be to introduce an ultraviolet cutoff k_c in momentum space, above which the theory breaks down. Nevertheless, this procedure introduces two flaws: i) the energy density scales as k_c^{d+1} , which leads to a catastrophic value compared to the observed energy density in our universe for any scale k_c related to high-energy physics scales; ii) this cutoff in momentum explicitly violates Lorentz-invariance and leads to a vacuum expectation value of the energy-momentum tensor, which is not proportional to $g_{\mu\nu}$ and therefore cannot be accepted as such for a description of vacuum. The inclusion of non-Lorentz invariant counter terms can restore the symmetry and lead to the correct equation of state (Hollenstein et al. 2012). Another convenient approach is to use a covariant regularization, such as the dimensional regularization in which the number of dimensions d is written as $d = D + \epsilon$, with D an integer and $\epsilon \rightarrow 0$. Introducing a constant μ (the dimension of which is a mass, or the inverse of a length) so that the energy density and pressure keep the correct dimension, one obtains (see for example Martin 2012)

$$p = -\rho = \frac{m^{d+1} \Gamma\left(-\frac{d+1}{2}\right)}{\mu^\epsilon 2^{d+2} \pi^{\frac{d+1}{2}}}. \quad (6)$$

For instance, for $D = 3$, discarding the diverging $1/\epsilon$ term and using the modified minimal subtracting scheme, one finally obtains

$$p = -\rho = -\frac{m^4}{64\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right). \quad (7)$$

It is now explicit that the Lorentz-invariance is preserved (since $p = -\rho$). Moreover, the scaling of the energy density is now like m^{d+1} , which is better than k_c^{d+1} in the hard cutoff regularization. Nevertheless, the presence of the regulator μ does not allow a prediction for ρ , while natural values for μ lead to catastrophically high value compared to the observed value of ρ_Λ . In any event, the important point to be stressed at this level is that for a massless field ($m = 0$) the contribution to the vacuum energy density is exactly zero so that this regularization procedure accounts for a degravitation of massless fields, even if it does not give any physical mechanism that would be at its origin (see Ellis et al. 2011; Smolin 2009, for one example of such theories). This result corroborates the simple remark that if we were to build a traceless energy momentum tensor from the metric $g^{\mu\nu}$, the only solution would be to have $\langle T^{\mu\nu} \rangle = 0$. Said differently, to accommodate the equation of radiation (i.e. massless fields), $p = \rho/d$ with the one of vacuum, $p = -\rho$, one needs $p = \rho = 0$.

Though the specific consideration for a massless field does not stand for a general demonstration, the previous consideration corroborates the standard conclusion that some mechanism sets the contribution of vacuum energy to exactly zero in an isotropic spacetime of arbitrary dimensions. The origin of the accelerated expansion of the universe is then logically expected to happen by means of a distinct physical mechanism. The late domination of a scalar field or modifications to the Einstein-Hilbert action are the two options most investigated so far, and have been the subject of intensive research activities ever since there is evidence of an accelerated expansion (Clifton et al. 2012; Tsujikawa 2010).

In the next section we present a physical mechanism to generate a nonzero positive density energy and pressure from zero-point energies of a massless field (the gravitational field itself). This is achieved by assuming the existence of an additional compact spatial dimension, which will therefore modify Eq. (6). It is

well known that modification of the boundary conditions of a quantum field leads to nontrivial physical properties of the vacuum. The Casimir force between two infinite conducting plates is a famous example of a physical nonzero but finite contribution from the QED vacuum even if the electromagnetic field is massless. In the latter configuration, the isotropy of space has obviously been broken by the presence of boundary conditions. The pressure in the direction normal to the plates satisfies $p_{\perp} = 3\rho$ (with $\rho < 0$), while the pressure parallel to the plates satisfies $p_{\parallel} = -\rho$ (Brown & Maclay 1969), in accordance with the traceless nature of the electromagnetic field. Remarkably enough, the Lorentz invariance in the two dimensions parallel to the plates ensures the equation of state $p_{\parallel} = -\rho$ with a nonzero value of ρ . As we will see, in the presence of additional compact dimensions of space, a gravitational Casimir effect allows for a nonzero density energy that is Lorentz invariant in the usual 4D spacetime ($p = -\rho$), even for a massless (traceless) field.

3. Casimir effect from a higher compact dimension

The existence of additional space dimensions has been considered with various purposes in modern physics (for a review, see for example Rubakov 2001), from the Kaluza-Klein scenario (Kaluza 1983) aiming at unifying interactions to the more recent braneworld paradigm dealing with the hierarchy issue (Arkani-Hamed et al. 1998; Antoniadis et al. 1998; Randall & Sundrum 1999). In this picture, matter is localized in a 4D spacetime (the brane), while gravity can propagate in all the dimensions (the bulk). This picture allows for a large extra dimension (see also Antoniadis 1990, for a first proposal using large extra dimensions). Because the gravitational field is massless, dimensional regularization (Eq. (6)) ensures that the energy density vanishes in arbitrary N -dimensional infinite isotropic spacetime. However, in the case of compact additional dimensions, the situation is different since the structure of the quantum vacuum is modified by the quantification of the gravitational field in the additional dimensions. This quantification of the gravitational-field modes in the bulk leads to a Casimir energy that was computed many years ago for one extra dimension in pioneer works from the 80s in Appelquist & Chodos (1983b, a) for a Minkowski background metric and later in Rohrlich (1984) using a zero-point energy calculation and an exponential cutoff regularization.

In what follows, we first reproduce the calculation for $N = 1$ using dimensional regularization. We thus assume the existence of one spatial additional dimension compactified on a circle of radii R . The periodic condition $f(x^i, x^4 + 2\pi R) = f(x^i, x^4)$ allows the metric tensor to be expanded in Fourier series:

$$g_{\mu\nu}(x^i, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x^i) \exp(inx^4/R) \quad (8)$$

where x^4 is the coordinate in the extra dimension. In a specific gauge, the metric satisfies the propagation equation $\nabla^2 g_{\mu\nu} = 0$ so that the gravitational modes $g_{\mu\nu}^{(n)}$ satisfy the dispersion relation:

$$\omega_n(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + n^2/R^2}. \quad (9)$$

The mode $n = 0$ is the usual massless graviton, while the excited modes $n \neq 0$ correspond to effective massive gravitational fields of masses n/R (Kaluza-Klein tower). To simplify, we model the gravitational field by a scalar field and multiply the final

result by the number of polarization states $p_m = m(m-3)/2$ in m -dimensional spacetime ($p_5 = 5$). The previous assumption is justified since we consider a flat extra dimension. For situations with curvature, a conformally coupled scalar field would have been a better description of the true gravitational field.

With a vacuum energy per mode given by $\omega_n/2$, the total vacuum energy density is obtained as

$$\rho = \frac{p_{d+2}}{2\pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + n^2/R^2}. \quad (10)$$

Each term in the previous sum can be dimensionally regularized using Eq. (6) :

$$\rho = -\frac{2p_{d+2}\Gamma\left(-\frac{d+1}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d+3}{2}} R^{d+2}} \zeta_R(-d-1) \quad (11)$$

where ζ_R is the Zeta Riemann function. Using the reflection formula

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta_R(z) \pi^{-z/2} = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta_R(1-z) \pi^{(z-1)/2}, \quad (12)$$

one finally obtains a finite (regularized) contribution for $d = 3$

$$\rho_{\text{App}} = -\frac{15\zeta_R(5)}{128\pi^7 R^5} \simeq -4 \times 10^{-5} \frac{1}{R^5}. \quad (13)$$

This expression agrees with previous studies based on different regularization schemes: hard cutoff in Appelquist & Chodos (1983b), exponential cutoff in Rohrlich (1984), or point-splitting in Milton (2001). The density in the brane is then obtained by a trivial integration (in the fifth dimension):

$$\rho_{\text{brane}} = -\frac{15\zeta_R(5)}{64\pi^6 R^4} \simeq -2.5 \times 10^{-4} \frac{1}{R^4}. \quad (14)$$

Generalizations to a spacetime structure $M^4 \times S^N$ have been done in Candelas & Weinberg (1984) and Chodos & Myers (1985) for odd N and later in Myers (1986) and Kantowski & Milton (1987) for even N . Such generalizations to extra dimension N can be written as

$$\rho_{\text{brane}} = \kappa_N \frac{\hbar c}{R^4} \quad (15)$$

and are summarized in Table 1. The second column gives the relation between the gravitational Casimir energy ρ and the radius of the extra dimension in $R^4 \times S^N$ compactification for different values of N (the differences with Candelas & Weinberg (1984) and Chodos & Myers (1985) being the polarization factors p_{d+2}). The third column gives the radius of the extradimension, such that this gravitational Casimir energy is equal to the observed dark energy density (the sign being the one of the normalization constant in Col. 2). The fourth column gives the size of the additional dimension that would solve the hierarchy problem (i.e. in order to have a Planck scale equal to 1 TeV). Finally, the last column summarizes the present observational constraints on the size of this extra dimension, from $N = 1$ to $N = 7$ extra dimensions (Beringer et al. 2012; Fermi-LAT Collaboration et al. 2012). For instance, one can see from this table that the hierarchy problem can only be solved with $N \geq 6$. The conclusion to be drawn from this table is that extra dimensions cannot solve the hierarchy problem and explain the origin of dark energy at the same time without any additional ingredient. We now assume that the extra dimension is not introduced to solve the hierarchy

problem. Then, if one identifies the cosmological constant with the Casimir energy, it is clear that odd values of N are still excluded. Even values of N greater than one are more problematic, since the evaluation of their contribution contains a logarithmic term of some unknown scale μ . This makes the normalization constant (Col. 2) not well determined. Nevertheless, any plausible value of μ (say below the Planck mass) will not make a large numerical difference and will therefore lead to a radius that is not very different from those obtained in the odd case. Therefore we are left with the only possibility of having one extra dimension if the cosmological constant has to be created only from the Casimir energy contribution of a higher compact dimension. However, in the 1D case, as can be seen from Table 1, a negative sign then seems to be obtained for ρ , while observations request a positive sign. More sophisticated and somewhat speculative scenarios have been proposed to overcome this dead end, although no completely convincing solution has emerged (Milton 2003; Elizalde 2006a). Among those scenarios, we mention the possibility of considering a nontrivial topology of space (Elizalde 2006b,a) or different boundary conditions (twisted boundary condition will change the sign of the Casimir energy Milton 2003, as well as \mathbb{Z}^2 symmetry on a torus compactification T^2 with certain shape moduli θ , as shown in Matsuda & Seki 2006). They also comprise new fermion fields in the bulk (Greene & Levin 2007; Matsumoto 2013), massive graviton (Bauer & Seidl 2005), a latticed extradimension (Cognola et al. 2004, 2005), a time evolution of the size of the extra dimension (Leon 2005; Blanchard et al. 2012) or even of the scale factor (Cahill 2011; Bernard & LeClair 2013), curvature in the bulk (for example anti-de Sitter and a massive scalar field as in Li 2005, or a bulk fermion field in the Randall-Sundrum model, Shao & Chen 2010). In conclusion, previous attempts to directly identify this Casimir energy with the cosmological constant have not led to a definite conclusion.

In the following we re-examine this question in the cosmological context. We show that this provides a mechanism leading to a positive Casimir energy density ρ at late times. The key ingredient is to take the finite age of the Universe into account. This finite age implies the existence of a length scale, the Hubble radius $cH(t)^{-1}$. This clearly adds a boundary condition that has to be considered. We make two assumptions to account for this effect. First, only modes corresponding to wavelengths shorter than the Hubble radius $cH(t)^{-1} \sim ct$ contributes to the density of the vacuum energy (see also Cahill 2011 for a similar proposition in the cosmological context, or Padmanabhan 2012 for a different mechanism also implying the Hubble radius). The second assumption is that as long as the Hubble radius is shorter than the radius R of the extra dimension, the energy density is equal to zero. The reason is that when the horizon is smaller than the radius of the extra dimension, the structure of the quantum vacuum cannot depend on the compact nature of the extra dimension because gravitons have not yet explored the ‘‘compactness’’ of space. The situation should therefore be equivalent to the one previously discussed of a massless scalar field in an isotropic spacetime, leading to $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ (see Eq. (6)). It is easy to see why those assumptions can yield a net positive contribution of zero-point energy. Indeed, when the horizon radius crosses the radius of the extra dimension, the change in the vacuum is only due to new modes that appear with a wavelength larger than $2\pi R$. Those modes contribute with $\hbar\omega/2$ of vacuum energy and a UV cutoff of about $1/R$, leading to a finite positive contribution. In this picture, the cosmological constant can be seen as a ‘‘temporal’’ Casimir effect, as if the boundary conditions were switched on at a given moment of time. The observable quantity is therefore

the change of vacuum energy when the Hubble radius crosses the extra dimension.

The previous discussion implies that (13) has to be changed in order to fix the subtraction point in the energy density at $t = R/c$. To perform this task, we add a low-energy cutoff $\omega_n(\mathbf{k}) > 2\pi/t$ to (10) and a counterterm $CT(t)$, which restores Lorentz invariance and insures that ρ is zero as long as $t \leq R/c$,

$$\rho(t) = \frac{5}{R} \int_{\omega_n(\mathbf{k}) > 2\pi/t} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + n^2/R^2} + CT(t) \quad (16)$$

with $CT(t)$ such that $\rho(t \leq 2\pi R/c) = 0$. At later times, the boundary condition changes and the energy density is no longer kept to zero. The counterterm then stays equal to its value at time $2\pi R/c$ (which we note CT), obtained from the transition condition $\rho(2\pi R/c) = 0$

$$\frac{5}{R} \int_{\omega_n(\mathbf{k}) > 0} (\dots) - \frac{5}{R} \int_{\omega_n(\mathbf{k}) < c/R} (\dots) + CT = 0. \quad (17)$$

In the late time regime, $t \gg R/c$, the cut off introduced by the Hubble radius can be neglected so that the present-day energy density ρ_0 reads as

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{5}{R} \int_{\omega_n(\mathbf{k}) > 0} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + n^2/R^2} + CT \\ &= \frac{5}{R} \int_{\omega_n(\mathbf{k}) < c/R} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{k}^2 + n^2/R^2} \end{aligned} \quad (18)$$

after using Eq. (17). We see in the previous expression that R acts as a UV cutoff for the sum of zero-point energies. The condition $\omega_n(\mathbf{k})^2 < (1/R)^2$ implies that only the term $n = 0$ contributes to the last integral, rendering it elementary. This allows us to obtain the value of the density (reintroducing explicitly \hbar and c):

$$\rho_0 = \frac{5\hbar c}{32\pi^3 R^5}. \quad (19)$$

The other components of the energy-momentum tensor can be obtained from ρ_0 . Indeed, the traceless nature of the gravitational field, together with the symmetry of the problem, requires that

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \rho_{\text{cas}} (g^{\mu\nu} + 5\hat{n}^\mu \hat{n}^\nu) \quad (20)$$

with \hat{n}^μ the unit spacelike vector pointing in the extra dimension ($\hat{n}^2 = -1$) and ρ_{cas} is a constant (because of the conservation laws $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). One finds that the pressure in the extra dimension (perpendicular to the brane) is $p^\perp = 4\rho_0$, while the pressure in the brane (the usual spacetime dimension) is such that $p^\parallel = -\rho_0$. This situation is analogous to the previous discussion of the electromagnetic Casimir situation (Sect. 2). Also p^\perp could have been derived from energy conservation when considering a variation in the radius R . On the brane, the energy-momentum tensor is obtained by integrating over the fifth dimension,

$$\rho_{\text{brane}} = \frac{5\hbar c}{16\pi^2 R^4}, \quad p_{\text{brane}} = -\rho_{\text{brane}}. \quad (21)$$

Equation (21) can thus be identified with the present-day dark energy density $\rho_{\text{DE}} = 0.7\rho_c \approx 4 \text{ keV/cm}^3$ for an appropriate value of R . Such an identification leads to predicting the size of the extra dimension given by

$$R = \left(\frac{5\hbar G}{2\pi c^3 \Lambda} \right)^{\frac{1}{4}} = 35 \text{ } \mu\text{m}. \quad (22)$$

Table 1. Summary of constraints on extra dimensions.

N	$\kappa_N = \frac{R^4 \rho}{\hbar c}$	R_N^Λ (μm)	$R_N^{\text{hierar.}}$ (μm)	Constraints (μm)
1	-2.5×10^{-4}	(10.5)	2.6×10^{19}	<44 (ISL) <44 (NS)
2	–	–	2.2×10^3	<30 (ISL) <0.00016 (NS)
3	1.1×10^{-3}	15.0	9.7×10^{-3}	< 2.6×10^{-6} (NS) < 10^{-3} (LHC)
4	–	–	2.0×10^{-5}	< 3.4×10^{-7} (NS)
5	1.2×10^{-2}	27.2	5.0×10^{-7}	< 1.0×10^{-7} (NS)
6	–	–	4.3×10^{-8}	< 4.4×10^{-8} (NS)
7	3.6×10^{-2}	36.1	7.3×10^{-9}	< 2.4×10^{-8} (NS)

Notes. ISL is for inverse square law test (Adelberger et al. 2009), NS for neutron star constraints (Hannestad & Raffelt 2003), and LHC from the CMS experiment at CERN.

A consequence of the present discussion is that gravitational laws are modified on the scale of the radius R , which is precisely the range of present experiments, such as the inverse square law tests (Kapner et al. 2007; Adelberger et al. 2009) or experiments aiming at measuring the Casimir force (Antoniadis et al. 2011). More interestingly, because of numerical prefactors, the value of R predicted here is slightly lower than the dimensional length scale ℓ_Λ introduced in the introduction.

The 4D gravitational potential, in the presence of one extra dimension is obtained as an infinite sum of Yukawa potentials, each of them corresponding to the one massive mode of the Kaluza Klein tower (Arkani-Hamed et al. 1999; Kehagias & Sfetsos 2000)

$$V = -\frac{G_3 M}{r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|m| \frac{r}{R}} = -\frac{G_3 M}{r} \coth\left(\frac{r}{2R}\right). \quad (23)$$

For $r \gg R$, the previous expression is given by the Newtonian expression ($m = 0$) plus the contribution of the lightest Kaluza-Klein modes ($n = \pm 1$),

$$V \simeq -\frac{G_3 M}{r} (1 + 2 \exp(-r/R)), \quad r \gg R. \quad (24)$$

This corresponds to a Yukawa modification with strength $\alpha = 2$ and a range given by the radius R of the extra dimension. Using this type of potential, the analyses of ISL tests (Adelberger et al. 2009) give a maximum size of $44 \mu\text{m}$ for R at 95% confidence level. Our prediction is therefore just below the present-day limits. Improvement of these measurements will therefore be critical for testing our model; nevertheless, when probing the ISL at distance $\sim R$, the complete expression should be used instead of the simple Yukawa description (see Fig. 1). On smaller scales, the best constraints on gravity laws are obtained by Casimir force measurements (Decca et al. 2007). The experiments are performed at a smaller distance than the size of the extra dimension, leading to a different behavior for the potential (23)

$$V \simeq -\frac{2G_3 MR}{r^2}. \quad (25)$$

It leads to a power-law modification of the gravitational force between two test masses with an amplitude scaled by R given by Eq. (22). This modification could be searched for in Casimir experiments operating at short distances, although present-day limits in those experiments are still several orders of magnitude above our prediction (Antoniadis et al. 2011).

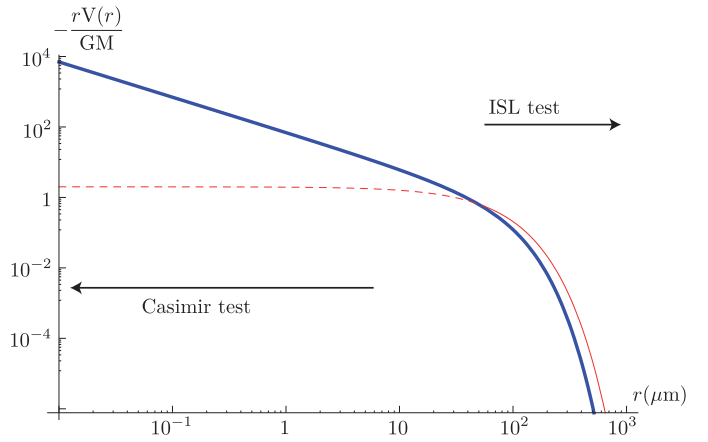


Fig. 1. Point-particle gravitational potential for one extra dimension (bold black line) and Yukawa (red line). The Yukawa modification is taken with a range given by the present-day constraint stemming from Adelberger et al. (2009), $\lambda = 44 \mu\text{m}$. The dashed part of this curve corresponds to scales not tested in Adelberger et al. (2009). The extradimension potential is plotted for a value of the radius given by $R = 35 \mu\text{m}$. Our prediction is not excluded by experiments, but further improvement will soon give a definite answer. The short-scale behavior is different from the pure Yukawa modification usually searched for in experiments.

4. Conclusion

The zero-point energy from a quantized field present in an additional compact dimension naturally provides a nonvanishing value for the vacuum contribution to density of the universe, through a Casimir-like effect. Such a term is naturally Lorentz invariant in the usual 4D spacetime and therefore may provide a natural explanation for the observed cosmological constant. However, present-day experimental limits on possible additional dimension, summarized in Table 1, exclude more than one extra dimension for such contribution to be the only origin of the observed dark energy density¹. The case of one extra dimension is still allowed, although in the case of a Minkowski spacetime, it leads to a negative contribution to the density of the universe.

¹ Strictly speaking this conclusion holds only for odd number of extra dimensions, as the actual Casimir contribution for even number of extra dimensions is not properly known. Of course, if other contributions are present (brane tensions, warping etc...), large extra dimensions are still viable.

In the cosmological context, we have proposed that the Hubble radius acts as a cut-off to mode wavelenghts contributing to the vacuum expectation value, i.e. an infrared cut-off in Eq. (4). Using a zero-point energy calculation, we showed that this infrared cut-off yields a positive contribution. Therefore this mechanism naturally explains the origin of the observed cosmic acceleration that appears as a manifestation of the quantized gravitational field in an additional dimension. A first consequence of this model is that the Planck energy scale is lowered to $\sim 10^9$ GeV. A second consequence is that the equation of state of cosmological dark energy should be exactly that of a cosmological constant, i.e. $w = -1$. A third consequence is that gravitation law would be modified on scales that are about the size of the compact dimension, which is $35 \mu\text{m}$, a value below the purely dimensional dark energy length scale $(\hbar c/\rho_v)^{1/4} \sim 85 \mu\text{m}$ (Kapner et al. 2007; Beane 1997) and below but close to present experimental limits on departure to the inverse square law of gravity at short scales. This leaves open the fascinating possibility that tests of the gravitation law on short distance shed new light on the nature and origin of cosmic acceleration.

Acknowledgements. The authors are grateful to Serge Reynaud, Carlo Rizzo, and Bertrand Chauvineau for fruitful discussions.

References

- Adelberger, E. G., Gundlach, J. H., Heckel, B. R., Hoedl, S., & Schlamminger, S. 2009, *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 62, 102
- Amendola, L., Appleby, S., Bacon, D., et al. 2012 [[arXiv:1206.1225](#)]
- Antoniadis, I. 1990, *Phys. Lett. B*, 246, 377
- Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., & Dvali, G. 1998, *Phys. Lett. B*, 436, 257
- Antoniadis, I., Baessler, S., Büchner, M., et al. 2011, *Comptes Rendus Physique*, 12, 755
- Appelquist, T., & Chodos, A. 1983a, *Phys. Rev. D*, 28, 772
- Appelquist, T., & Chodos, A. 1983b, *Phys. Rev. Lett.*, 50, 141
- Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., & Dvali, G. 1998, *Phys. Lett. B*, 429, 263
- Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., & Dvali, G. 1999, *Phys. Rev. D*, 59, 086004
- Bauer, F., & Seidl, G. 2005, *Phys. Lett. B*, 624, 250
- Beane, S. R. 1997, *General Relativity and Gravitation*, 29, 945
- Beringer, J., Arguin, J.-F., Barnett, R. M., et al. 2012, *Phys. Rev. D*, 86, 010001
- Bernard, D., & LeClair, A. 2013, *Phys. Rev. D*, 87, 063010
- Blanchard, A. 2010, *The astronomy and astrophysics review*, 18, 595
- Blanchard, A., Dupays, A., & Lamine, B. 2012, in *Proc. XLVIIth Rencontres de Moriond*, 158
- Brown, L. S., & Maclay, G. J. 1969, *Phys. Rev.*, 184, 1272
- Cahill, K. 2011 [[arXiv:1102.5572](#)]
- Candelas, P., & Weinberg, S. 1984, *Nucl. Phys. B*, 237, 397
- Chodos, A., & Myers, E. 1985, *Phys. Rev. D*, 31, 3064
- Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., & Skordis, C. 2012, *Phys. Rep.*, 513, 1
- Cognola, G., Zerbini, S., Elizalde, E., Nojiri, S., & Odintsov, S. 2004, *Mod. Phys. Lett. A*, 19, 1435
- Cognola, G., Elizalde, E., & Zerbini, S. 2005, *Phys. Lett. B*, 624, 70
- Decca, R. S., López, D., Fischbach, E., et al. 2007, *Eur. Phys. J. C*, 51, 963
- Elizalde, E. 2006a, in *The Dark Side of the Universe*, eds. C. Manoz, & G. Yepes, AIP Conf. Ser., 878, 232
- Elizalde, E. 2006b, *J. Phys. A Math. General*, 39, 6299
- Ellis, G. F. R., van Elst, H., Murugan, J., & Uzan, J.-P. 2011, *Class. Quant. Grav.*, 28, 225007
- Fermi-LAT Collaboration, Ajello, M., Baldini, L., et al. 2012, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2, 12
- Frieman, J. A., Turner, M. S., & Huterer, D. 2008, *ARA&A*, 46, 385
- Gardner, C. L. 2002, *Phys. Lett. B*, 524, 21
- Greene, B., & Levin, J. 2007, *J. High Energ. Phys.*, 2007, 096
- Hannestad, S., & Raffelt, G. G. 2003, *Phys. Rev. D*, 67, 125008
- Hollenstein, L., Jaccard, M., Maggiore, M., & Mitsou, E. 2012, *Phys. Rev. D*, 85, 124031
- Kaluza, T. 1983, in *Unified Field Theories of >4 Dimensions*, eds. V. De Sabbata, & E. Schmutzer, 427
- Kantowski, R., & Milton, K. A. 1987, *Phys. Rev. D*, 36, 3712
- Kapner, D. J., Cook, T. S., Adelberger, E. G., et al. 2007, *Phys. Rev. Lett.*, 98, 021101
- Kehagias, A., & Sfetsos, K. 2000, *Phys. Lett. B*, 472, 39
- Kragh, H. 2011 [[arXiv:1111.4623](#)]
- Laureijs, R., Amiaux, J., Arduini, S., et al. 2011 [[arXiv:1110.3193](#)]
- Lemaître, G. 1934, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 20, 12
- Leon, J. P. 2005, *General Relativity and Gravitation*, 37, 53
- Li, L.-X. 2005, *Mod. Phys. Lett. A*, 20, 733
- LSST Science Collaborations, Abell, P. A., Allison, J., et al. 2009 [[arXiv:0912.0201](#)]
- Martin, J. 2012, *Comptes Rendus Physique*, 13, 566
- Matsuda, S., & Seki, S. 2006, *Int. J. Mod. Phys. A*, 21, 3095
- Matsumoto, J. 2013 [[arXiv:1303.4067](#)]
- Milton, K. 2001, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy* (World Scientific)
- Milton, K. A. 2003, *Gravit. Cosmol.*, 9, 66
- Myers, E. 1986, *Phys. Rev. D*, 33, 1563
- Padmanabhan, T. 2012 [[arXiv:1210.4174](#)]
- Peebles, P. J., & Ratra, B. 2003, *Rev. Mod. Phys.*, 75, 559
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., et al. 1999, *ApJ*, 517, 565
- Randall, L., & Sundrum, R. 1999, *Phys. Rev. Lett.*, 83, 3370
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., et al. 1998, *AJ*, 116, 1009
- Rohrlich, D. 1984, *Phys. Rev. D*, 29, 330
- Rubakov, V. A. 2001, *Physics Uspekhi*, 44, 871
- Shao, S.-H., & Chen, P. 2010, *Phys. Rev. D*, 82, 126012
- Smolin, L. 2009, *Phys. Rev. D*, 80, 084003
- Straumann, N. 2002 [[arXiv:gr-qc/0208027](#)]
- Tsujikawa, S. 2010, in *Lect. Notes Phys.* (Berlin: Springer Verlag), ed. G. Wolschin, 800, 99
- Weinberg, S. 1989, *Rev. Mod. Phys.*, 61, 1
- Zel'Dovich, Y. B. 1967, *Sov. J. Exp. Theoret. Phys. Lett.*, 6, 316
- Zel'dovich, Y. B. 1968, *Sov. Phys. Uspekhi*, 11, 381

Critical Phenomena: field theoretical approach

 Recommander ce contenu sur

Jean Zinn-Justin (2010), Scholarpedia, 5(5):8346.

doi:10.4249/scholarpedia.8346

revision #137034 [link to/cite this article]

- **Prof. Jean Zinn-Justin**, CEA, IRFU and Institut de Physique Théorique, Centre de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

Continuous phase transitions display, near the critical temperature, remarkable universal (*i.e.*, independent of the specific system within a wide class of systems) macroscopic or large distance properties. Renormalization group methods allow understanding the origin of universality as well as calculating universal quantities. Universality of the large distance behaviour is then related to fixed points of the renormalization group flow. Wilson and Fisher (1972) succeeded in determining a set of fixed points (known as **Wilson-Fisher fixed points**) relevant for a large class of phase transitions (liquid-vapour, Helium, ferromagnets...) by using a method that extends to complex (*i.e.*, non-integer) values of the space dimension d the Feynman diagram expansion, which is the standard approximation tool in perturbative quantum field theory. In this way they have defined the value of the critical exponents for non-integer values of the dimensions. They discovered that near space dimension four ($d = 4 - \varepsilon$ with $\varepsilon \rightarrow 0$), universal quantities can be calculated in the form of an ε -expansion ($\varepsilon > 0$). This approach provided the first examples of analytic estimates of critical exponents that differed from their classical values (also known as "mean-field values" or "quasi-Gaussian values"). Quantum field theory methods then allowed for a general derivation of scaling properties and provided an efficient method for calculating universal quantities.

Contents

- 1 The renormalization group: Introduction
- 2 Statistical field theory
- 3 The renormalization group: General formulation
- 4 The Gaussian fixed point
 - 4.1 Short distance regularization
 - 4.2 The linearized RG flow
- 5 Statistical scalar field theory: Perturbation theory
 - 5.1 The Gaussian model
 - 5.2 The perturbed Gaussian or quasi-Gaussian model
- 6 Dimensional continuation and regularization
 - 6.1 Dimensional continuation
 - 6.2 Dimensional regularization
- 7 Perturbative renormalization group
 - 7.1 The renormalization theorem
 - 7.2 Remarks
 - 7.3 Critical RG equations
 - 7.4 RG equations in the critical domain above T_c
 - 7.5 Renormalized RG equations
- 8 Solution of the RG equations
- 9 Wilson's-Fisher fixed point: Epsilon-expansion
 - 9.1 The Ising class fixed point
 - 9.2 Generalization
- 10 Epsilon expansion: A few results
 - 10.1 General results
 - 10.2 Critical exponents as epsilon-expansions
- 11 Summation of the epsilon-expansion and numerical values of exponents
- 12 References

13 Further reading

14 See also

The renormalization group: Introduction

The renormalization group has been introduced to understand **universal** properties of a wide class of random or statistical systems with a large number of degrees of freedom. The term **universal property** is used in this context to emphasize the remarkable property that systems, which seem physically unrelated, share, somewhat unexpectedly, some non-trivial large scale properties.

The simplest examples of universality are provided, in fact, by the central limit theorem of probabilities, which deals with the average of independent random variables with the same distribution, or by the asymptotic behaviour of Markovian random walk at large times. In both problems, one is interested in the collective properties of an infinite number of random variables in a situation where the probability of large deviations with respect to the mean value *decreases fast enough*. In both examples, the asymptotic probability distribution is Gaussian, independently of the random variable distribution or the random walk transition function. Moreover, in the case of the random walk with finite time steps and on a space lattice, this universality allows defining a continuum limit both in time and in space. These examples do not require introducing a renormalization group because the asymptotic distributions can be calculated exactly, but a renormalization group strategy allows recovering the universal results without explicit solution.

A more intriguing situation is provided by quantum field theory. In this context (historically started with quantum electrodynamics or QED), a naive definition of perturbation theory leads to (short-distance) infinities. It is then necessary to modify the short-distance structure of the initial theory, leading to a finite but *unphysical* **regularized theory**. This modification is parametrized by some length scale known as **short-distance cutoff** and here denoted by $1/\Lambda$, (Λ having the dimension of an inverse distance and being known as an ultraviolet (UV) cut-off because it cuts off high wavelengths). However, and this was the surprise in the early stage of the construction of QED, a universal large distance theory, the so-called **renormalized theory**, can be defined by parametrizing it in terms of **renormalized parameters**, that are specific functions of the parameters (**bare parameters**) of the regularized theory. The definition of the renormalized parameters implicitly or explicitly requires the introduction of a new distance scale known as **renormalization scale**. This procedure is called renormalization. The renormalized theory resulting from this process is generically no longer related to a Gaussian field distribution, which in this example corresponds to a non-interesting free field theory. The universality of the large distance behaviour of the renormalized theory refers to the independence on the short-distance modifications of the renormalized theory when considered at scales of distance much larger than the short-distance cutoff $1/\Lambda$ (for fixed values of the renormalized parameters). The very existence of the renormalized theory in the "ultraviolet limit" $\Lambda \rightarrow \infty$ (at fixed renormalized parameters) can be (perturbatively and non-perturbatively) proved for many cases of *local* quantum field theories, including the so-called gauge theories.

The relation between the renormalized parameters in different parametrizations of the *same* renormalized theory corresponding to different values of the renormalization scale was historically called **renormalization group** (Stueckelberg and Peterman 1953) and the linear partial differential equations for the correlators of the renormalized theory, resulting from variations of the parameters under an infinitesimal change of the renormalization scale, were called differential **renormalization group equations**.

Landau's theory (1937) of critical phenomena in macroscopic continuous phase transitions (and thus with divergent correlation length at the critical temperature) or **mean field theory**, are interpreted in modern language as corresponding to Gaussian distribution or perturbed Gaussian distribution ("**quasi-Gaussian distribution**"). However, for systems with short-range interactions, in space dimensions two and three, quasi-Gaussian models *do not* describe correctly the universal properties of phase transitions at large distance near the critical temperature. Following Kadanoff's idea, Wilson introduced a more general notion of renormalization group. The statistical model describing the specific system is defined in terms of a microscopic scale $1/\Lambda$, for

example, the lattice spacing for a lattice model, and a Hamiltonian or configuration energy \mathcal{H} . The idea is to recursively integrate out the short distance degrees of freedom of the system to generate a sequence of effective Hamiltonians \mathcal{H}_λ corresponding to increasing scales $1/(\lambda\Lambda)$, with $\lambda \in [0, 1]$. The (non-linear) flow equations that relate Hamiltonians associated to different scales are also called **renormalization group equations**. In a continuum space (but *not* on the lattice), infinitesimal changes of scales are possible and lead to differential equations for the effective Hamiltonian, see (1). If the renormalization group has attractive **fixed points**, then **universality** of the large distance properties can be understood since the effective Hamiltonians eventually converge as $\lambda \rightarrow 0$ toward a fixed-point Hamiltonian. The basin of attraction of a given fixed point in the space of Hamiltonians is called a **universality class**. It can be verified that the Gaussian theory provides the simplest example of a fixed point, thus called **Gaussian fixed point**.

It is now understood that both the field theory renormalization group and Wilson's general formulation are related. The field renormalization group is the asymptotic form of the general renormalization group in a neighbourhood of the Gaussian fixed point.

Statistical field theory

Even if the initial statistical model is defined in terms of random variables associated to the sites of a space lattice, and taking only a finite set of values (like, *e.g.*, the classical spins of the Ising model), it is intuitive that the fixed point theory will be a statistical field theory in continuum space. Therefore, we consider a classical statistical system defined in terms of a random real field $\phi(x)$ in continuum space, $x \in \mathbb{R}^d$. The partition function is then given by a field integral (*i.e.*, a sum over field configurations)

$$\mathcal{Z} = \int [d\phi(x)] e^{-\mathcal{H}(\phi)}.$$

$\mathcal{H}(\phi)$ is called the Hamiltonian in classical statistical physics language. The condition of short range interactions translates into the property of **locality** of the field theory

$$\mathcal{H}(\phi)$$

can be chosen as a space-integral over a linear combination of monomials in the field and its derivatives. We assume also space translation and rotation invariance, and \mathbb{Z}_2 reflection symmetry

$$\mathcal{H}(\phi)$$

$=\mathcal{H}(-\phi)$ except when stated explicitly otherwise. Finally, the coefficients of $\mathcal{H}(\phi)$ are regular functions of the temperature T near the critical temperature T_c where a continuous phase transition occurs. In the low temperature phase, the \mathbb{Z}_2 symmetry is spontaneously broken.

Physical observables involve field correlation functions (generalized moments),

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [d\phi(x)] \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) e^{-\mathcal{H}(\phi)}.$$

They can be derived by functional differentiation from a generalized partition function in an external field $H(x)$,

$$\mathcal{Z}(H) = \int [d\phi(x)] \exp \left[-\mathcal{H}(\phi) + \int d^d x H(x)\phi(x) \right],$$

as

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}(0)} \frac{\delta}{\delta H(x_1)} \frac{\delta}{\delta H(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta H(x_n)} \mathcal{Z}(H) \Big|_{H=0}.$$

The more direct physical observables are the **connected** correlation functions $W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (generalized cumulants), which can be obtained by function differentiation from the free energy $\mathcal{W}(H) = \ln \mathcal{Z}(H)$ (omitting a temperature factor irrelevant here) in the external field H :

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta H(x_1)} \frac{\delta}{\delta H(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta H(x_n)} \mathcal{W}(H) \Big|_{H=0}.$$

Due to translation invariance, $W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = W^{(n)}(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a)$ for any vector a .

Connected correlation functions have the so-called **cluster** property: if one separates the points x_1, \dots, x_n in two non-empty sets, connected functions go to zero when the distance between the two sets goes to infinity. It is the large distance behaviour of connected correlation functions in the critical domain near T_c that may exhibit universal properties.

The renormalization group: General formulation

The denomination **renormalization group** (RG) refers to the property that $\ln \lambda$, where $\lambda > 0$ belongs to the dilatation (associated to the change of scale) semi-group, belongs to the additive group of real numbers.

To construct an RG flow, the basic idea is to integrate in the field integral recursively over short distance degrees of freedom. This leads to the definition of an **effective Hamiltonian** \mathcal{H}_λ , function of a scale parameter λ (such that $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$) and of a transformation \mathcal{T} in the space of Hamiltonians such that

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{T}[\mathcal{H}_\lambda], \quad (1)$$

an equation called RG equation (RGE). The appearance of the derivative $\lambda d/d\lambda = d/d \ln \lambda$ reflects the multiplicative character of dilatations or scale changes. The RGE thus defines a dynamical process in the "time" $\ln \lambda$.

We assume that the mapping $\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_\lambda$ is **Markovian**, that is, that $\mathcal{T}[\mathcal{H}_\lambda]$ depends on \mathcal{H}_λ but not on the trajectory that has led from $\mathcal{H}_{\lambda=1}$ to \mathcal{H}_λ , that the Markovian process is *stationary*, in such a way that $\mathcal{T}[\mathcal{H}_\lambda]$ depends on λ only through \mathcal{H}_λ (and thus does not depend on λ explicitly). Finally, we assume, and this is also an important hypothesis, that the mapping \mathcal{T} is sufficiently *differentiable* (for example, infinitely differentiable). These assumptions summarize the characteristic properties of these equations and are at the origin of many renormalization group properties.

Universality is related to the existence of fixed points solution of the equation

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}^*) = 0.$$

Since the mapping \mathcal{T} is *differentiable*, the local flow near a fixed point can then be studied by linearizing equation (1) at the fixed point:

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}^* + \Delta \mathcal{H}_\lambda) \sim L^* \Delta \mathcal{H}_\lambda,$$

and is governed by the eigenvalues and eigenvectors of the linear operator L^* . Formally, the solution of the linearized equations can be written as

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}^* + \lambda^{L^*} (\mathcal{H}_{\lambda=1} - \mathcal{H}^*).$$

The Gaussian fixed point

An RG flow can be constructed that has as a fixed point the critical Gaussian model corresponding, in d space dimensions, to the quadratic Hamiltonian

$$\mathcal{H}_G^*(\phi) = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{\mu=1}^d (\partial_\mu \phi(x))^2 \quad (2)$$

($\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$) and, thus, to a free massless field theory in quantum field theory language.

The Hamiltonian flow *near* the Gaussian fixed point, in the linear approximation, can be implemented by the simple scaling

$$\phi(x) \mapsto \lambda^{(2-d)/2} \phi(x/\lambda). \quad (3)$$

After the change of variables $x' = x/\lambda$, one verifies that $\mathcal{H}_G^*(\phi)$ is indeed invariant.

For Ising-like systems with a \mathbb{Z}_2 symmetry or, more generally, for models with an $O(N)$ symmetry, it is found that the **Gaussian fixed point is stable above space dimension four, marginally stable in dimension four and unstable below dimension four.**

Short distance regularization

However, with the Hamiltonian (2), the Gaussian model (6) has a problem: too singular fields contribute to the corresponding field integral in such a way that correlation functions at coinciding points are not defined. For example,

$$W^{(2)}(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p}{p^2},$$

which diverges in any space dimension $d \geq 2$. In particular, expectation values of local perturbations to the Gaussian theory of the form $\phi^m(x)$ are not defined. Therefore, it is necessary to modify the Gaussian model at short distance to restrict the field integration to more regular fields, continuous to define powers of the field, satisfying differentiability conditions to define expectation values of the field and its derivatives taken at the same point. This can be achieved by adding terms with enough more derivatives

$$\mathcal{H}_G^*(\phi) \mapsto \mathcal{H}_G(\phi) = \mathcal{H}_G^*(\phi) + \frac{1}{2} \sum_{k=2} \alpha_k \int d^d x \phi(x) \nabla_x^{2k} \phi(x), \quad (4)$$

where the coefficient α_k are only constrained by the positivity of the Hamiltonian. One verifies by explicit calculation that, for $d > 2$ the modified Gaussian theory has the same large distance behaviour but is now regularized at short distance. For $d \leq 2$, correlation functions still do not exist due now to a low momentum, large distance singularity, showing that critical phenomena can then certainly not be described by the Gaussian model.

The linearized RG flow

The transformation (3) generates the linearized RG flow at the Gaussian fixed point. Eigenvectors of the linear flow (3) are monomials of the form $\mathcal{O}_{n,k}(\phi) = \int d^d x O_{n,k}(\phi, x)$, where $O_{n,k}(\phi, x)$ is a product of powers of the field and its derivatives at point x with $2n$ powers of the field (reflection \mathbb{Z}_2 symmetry) and $2k$ powers of ∂_μ . Their RG behaviour under the transformation (3) is then given by a simple dimensional analysis. One defines the dimension of x as -1 . The dimension of ∂_μ is then $+1$. The Gaussian dimension of the field is $[\phi] = (d-2)/2$. The dimension $[\mathcal{O}_{n,k}]$ of $\mathcal{O}_{n,k}$ is then

$$[\mathcal{O}_{n,k}] = -d + n(d-2) + 2k. \quad (5)$$

It can be verified that $\mathcal{O}_{n,k}$ scales like $\lambda^{-[\mathcal{O}_{n,k}]}$, and the corresponding eigenvalue of L^* thus is $\ell_{n,k} = -[\mathcal{O}_{n,k}]$. When $\lambda \rightarrow +\infty$, for $\ell_{n,k} > 0$ the amplitude of $\mathcal{O}_{n,k}(\phi)$ increases; it is a direction of instability and in the RG terminology $\mathcal{O}_{n,k}(\phi)$ is a **relevant** perturbation. For $\ell_{n,k} < 0$, the amplitude of $\mathcal{O}_{n,k}(\phi)$ decreases; it is a direction of stability and in the RG terminology $\mathcal{O}_{n,k}(\phi)$ is an **irrelevant** perturbation. In the special case $\ell_{n,k} = 0$, one speaks of a **marginal** perturbation and the linear approximation is no longer sufficient to discuss stability. Logarithmic behaviour in λ is then expected.

One verifies that $\int d^d x \phi^2(x)$ corresponds always to a direction of instability: it induces a deviation from the critical temperature and thus a finite correlation length (or a non-vanishing mass in field theory language). For $d > 4$, no other perturbation is relevant and the Gaussian fixed point is stable on the critical surface. At $d = 4$, one term becomes marginal

$$\int d^d x \phi^4(x),$$

which below dimension four becomes relevant. In dimension $d = 4 - \varepsilon$, ε positive and small (a notion we define later), it is the only relevant perturbation and one expects to be able to describe critical properties with a Gaussian theory to which this unique term is added.

If what follows, we assume that initially the statistical system is very close to the Gaussian fixed point. The RG flow is then first governed by the linear flow. Therefore, we implement first the corresponding RG transformation. We introduce a parameter $\Lambda \gg 1$ and substitute $\phi(x) \mapsto \Lambda^{(2-d)/2} \phi(x/\Lambda)$. After the change of variables $x' = x/\Lambda$, the monomials $\mathcal{O}_{n,k}(\phi)$ are multiplied by $\Lambda^{-[\mathcal{O}_{n,k}]}$. In the quantum field theory language, this could be called a Gaussian renormalization. The introduction of Λ has the effect of expressing the dimension (5) in terms of Λ : space coordinates x have dimension Λ^{-1} , derivatives dimension Λ and the field dimension $\Lambda^{(d-2)/2}$. The Hamiltonian is dimensionless.

Statistical scalar field theory: Perturbation theory

The Gaussian model

The Gaussian model is obtained by adding to the Gaussian Hamiltonian (4) the only relevant term above dimension four:

$$\mathcal{H}_0(\phi) = \mathcal{H}_G(\phi) + \frac{1}{2} \alpha_0 \Lambda^2 \int d^d x \phi^2(x), \quad (6)$$

where α_0 is the amplitude of the relevant term and is non-negative in the Gaussian model. The Gaussian model can only describe the high temperature phase $T \geq T_c$. In a Gaussian model, all correlation functions can be expressed in terms of the two-point function with the help of Wick's theorem. Except at coinciding points, one can take the $\Lambda \rightarrow \infty$ limit. However, to obtain a non-trivial universal large distance behaviour, it is also necessary to compensate the RG flow by choosing α_0 infinitesimal, taking the $\Lambda \rightarrow \infty$ limit at $r = \alpha_0 \Lambda^2$ fixed (r is a renormalized parameter in quantum field theory language). This defines the **critical domain**. The two-point function in the critical domain can then be written as

$$W^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d p e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2 + r}.$$

It has the so-called Ornstein-Zernicke form, also found in mean-field theory. Comparing with mean-field theory, one concludes that r plays the role of the deviation from the critical temperature T_c near T_c : $r \propto T - T_c$ for $T - T_c \rightarrow 0$.

For $r > 0$, $W^{(2)}(x, 0)$ decays exponentially at large distance as

$$W^{(2)}(x, 0) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\propto} \frac{e^{-|x|/\xi}}{|x|^{(d-1)/2}},$$

where the parameter ξ that governs the decay rate is called the **correlation length**. Here, $\xi = 1/\sqrt{r} \propto (T - T_c)^{-\nu}$ with $\nu = 1/2$, where ν is the correlation length exponent. At $r = 0$ (i.e., $T = T_c$) and for $d > 2$, $W^{(2)}(x, 0)$ decays algebraically as

$$W^{(2)}(x, 0) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\propto} |x|^{2-d}.$$

In two dimensions, the Gaussian model is not defined at T_c .

The perturbed Gaussian or quasi-Gaussian model

To allow for **spontaneous symmetry breaking** and, thus, to be able to describe physics below T_c , terms have necessarily to be added to the Gaussian Hamiltonian (4) to generate a double-well potential for constant fields. The minimal addition, which is also the leading term from the RG viewpoint, is of ϕ^4 type. This leads to

$$\mathcal{H}(\phi) = \mathcal{H}_G(\phi) + \frac{g}{4!} \Lambda^{4-d} \int d^d x \phi^4(x), \quad g > 0.$$

The ϕ^4 term generates a shift of the critical temperature. To recover a critical theory ($T = T_c$), it is necessary to further add a ϕ^2 term with a specific g -dependent coefficient:

$$\mathcal{H}(\phi) \mapsto \mathcal{H}(\phi) + \frac{1}{2} (\alpha_0)_c(g) \Lambda^2 \int d^d x \phi^2(x),$$

a mass renormalization in quantum field theory terminology. For dimensions $d > 4$, the ϕ^4 term is an irrelevant contribution that does not invalidate the universal predictions of the Gaussian model and corrections to the Gaussian theory can be obtained by expanding in powers of the coefficient g . For example, setting $u = g\Lambda^{4-d}$, the partition function is then given by

$$\mathcal{Z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-u)^k}{(4!)^k k!} \left\langle \left(\int d^d x \phi^4(x) \right)^k \right\rangle_G.$$

The Gaussian expectations values $\langle \bullet \rangle_G$ can then be evaluated in terms of the Gaussian two-point function with the help of Wick's theorem.

By contrast, for $d < 4$, the ϕ^4 contribution is relevant: the Gaussian fixed point is unstable and no longer governs the large distance behaviour. The perturbative expansion of the critical theory ($T = T_c$) in powers of u contains so-called infra-red, that is, long distance, or small momentum in Fourier space, divergences. To determine the large distance behaviour of correlation functions, it becomes necessary to construct a **general renormalization group**. This leads to functional equations that, in general, cannot be solved analytically. However, a trick has been discovered to extend the definition of all terms of the perturbative expansion to arbitrary complex values of the dimension d in the form of meromorphic functions. This allows replacing, in dimension $d = 4 - \varepsilon$, the general renormalization group by a much simpler asymptotic form and studying the model analytically as an expansion in powers of ε .

Dimensional continuation and regularization

To discuss dimensional continuation, it is convenient to introduce the Fourier representation of correlation functions. Taking into account translation invariance, one defines

$$(2\pi)^d \delta^{(d)}\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \exp\left(i \sum_{j=1}^n x_j p_j\right), \quad (7)$$

where, in analogy with quantum mechanics, the Fourier variables p_i are called momenta (and have dimension Λ). We also introduce the Fourier representation of the Gaussian two-point function (or propagator) $\Delta(x)$, corresponding to the Hamiltonian (4),

$$\Delta(x) \equiv \langle \phi(x)\phi(0) \rangle_G = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{-ipx} \tilde{\Delta}(p).$$

Dimensional continuation

A general representation of the Gaussian two-point function useful for **dimensional continuation** is

$$\tilde{\Delta}(p) = \int_0^\infty ds \rho(s\Lambda^2) e^{-sp^2}, \quad (8)$$

where $\rho(s) \rightarrow 1$ when $s \rightarrow \infty$. To reduce the field integration to continuous fields and, thus, to render the perturbative expansion finite, one needs at least $\rho(s) = O(s^q)$ with $q > (d-2)/2$ for $s \rightarrow 0$. If one wants the expectation values of all local polynomials to be defined, one must impose to $\rho(s)$ to converge to zero faster than any power. In the context of quantum field theory, since the effect of the ρ -factor is to suppress $\tilde{\Delta}(p)$ for values of $|p| \gg \Lambda$, Λ is called the **cut-off**. A contribution to perturbation theory (represented graphically by a Feynman diagram) takes, in Fourier representation, the form of a product of propagators integrated over a subset of momenta. With the representation (8), all momentum integrations become Gaussian and can be performed, resulting in explicit analytic meromorphic functions of the dimension parameter d . For example, the contribution of order g to the two-point function is proportional to

$$\Omega_d = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dp \tilde{\Delta}(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dp \int_0^\infty ds \rho(s\Lambda^2) e^{-sp^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty ds s^{-d/2} \rho(s\Lambda^2),$$

which in the latter form is holomorphic for $2 < \text{Re } d < 2(1+q)$.

Dimensional regularization

While for the theory of critical phenomena, dimensional continuation is sufficient since it allows exploring the neighbourhood of dimension four, for practical calculations restricted to leading order at large distance, an additional step is useful. It can be verified that if one takes $\text{Re } d$ sufficiently small so that by naive power counting all momentum integrals are convergent, one can then, after explicit dimensional continuation, take the infinite Λ limit. The resulting perturbative contributions become meromorphic functions with poles, in particular at dimensions at which large momentum, and low momentum in the critical theory, divergences appear. This method of regularizing large momentum divergences is called **dimensional regularization** and is extensively used in quantum field theory. It has also been used to calculate universal quantities in the theory of critical phenomena, like critical exponents, as $\varepsilon = 4 - d$ -expansions.

Perturbative renormalization group

The renormalization theorem

The perturbative renormalization group, as it has been developed in the framework of the perturbative expansion of quantum field theory, relies on the so-called renormalization theory. For the ϕ^4 field theory it has been first formulated in space dimension $d = 4$. For critical phenomena, a small extension is required that involves an additional expansion in powers of $\varepsilon = 4 - d$, after dimensional continuation.

To formulate the renormalization theorem, one introduces a momentum μ , called the renormalization scale, and a parameter g_r characterizing the **effective** ϕ^4 coefficient at scale μ , called the renormalized coupling constant. One can then find two dimensionless functions $Z(\Lambda/\mu, g)$ and $Z_g(\Lambda/\mu, g)$, that satisfy (g and Λ/μ are the only two dimensionless combinations)

$$\Lambda^{4-d} g = \mu^{4-d} Z_g(\Lambda/\mu, g) g_r = \mu^{4-d} g_r + O(g^2), \quad Z(\Lambda/\mu, g) = 1 + O(g), \quad (9)$$

calculable order by order in a double series expansion in powers of g and ε , such that all connected correlations functions

$$\tilde{W}_r^{(n)}(p_i; g_r, \mu, \Lambda) = Z^{-n/2}(g, \Lambda/\mu) \tilde{W}^{(n)}(p_i; g, \Lambda), \quad (10)$$

called **renormalized**, have, order by order in g_r , finite limits $\tilde{W}_r^{(n)}(p_i; g_r, \mu)$ when $\Lambda \rightarrow \infty$ at p_i, μ, g_r fixed. The factor $Z^{1/2}(\Lambda/\mu, g)$ is a multiplicative correction to the Gaussian field rescaling factor $\Lambda^{(d-2)/2}$.

Remarks

There is some arbitrariness in the choice of the **renormalization constants** Z and Z_g since they can be multiplied by arbitrary functions of g_r . The constants can be completely determined by imposing three **renormalization conditions** to the renormalized correlation functions, which are then independent of the specific choice of the regularization. This a first important result: since initial and renormalized correlation functions have the same large distance behaviour, this behaviour is to a large extent universal since it can, therefore, only depend at most on one parameter, the ϕ^4 coefficient g .

The renormalization constant $Z^{1/2}$ is just the ratio between the Gaussian field renormalization and the renormalization in presence of the ϕ^4 interaction.

Critical RG equations

From equation (10) and the existence of a limit $\Lambda \rightarrow \infty$, a new equation follows, obtained by differentiation of the equation with respect to Λ at μ, g_r fixed

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g_r, \mu \text{ fixed}} Z^{n/2}(g, \Lambda/\mu) \tilde{W}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) \rightarrow 0. \quad (11)$$

In agreement with the perturbative philosophy, one then neglects all contributions that, order by order, decay as powers of Λ . One defines asymptotic functions $\tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \Lambda)$ and $Z_{\text{as.}}(g, \Lambda/\mu)$ as sums of the perturbative contributions to the functions $\tilde{W}^{(n)}(p_i; g, \Lambda)$ and $Z(g, \Lambda/\mu)$, respectively, that do not go to zero when $\Lambda \rightarrow \infty$. Using the chain rule, one derives from equation (11)

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g, \Lambda/\mu) \frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2} \eta(g, \Lambda/\mu) \right] \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = 0,$$

where the functions β and η are defined by

$$\beta(g, \Lambda/\mu) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g_r, \mu} g, \quad \eta(g, \Lambda/\mu) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{g_r, \mu} \ln Z_{\text{as.}}(g, \Lambda/\mu).$$

Since the functions $\tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}$ do not depend on μ , the functions β and η cannot depend on Λ/μ , and one finally obtains the RG equations (Zinn-Justin 1973):

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2} \eta(g) \right] \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = 0. \quad (12)$$

From equation (9), one immediately infers that $\beta(g) = -\varepsilon g + O(g^2)$.

RG equations in the critical domain above T_c

Correlation functions may also exhibit universal properties near T_c when the correlation length ξ is large in the microscopic scale, here, $\xi\Lambda \gg 1$. To describe universal properties in the critical domain above T_c , one adds the ϕ^2 relevant term to the Hamiltonian:

$$\mathcal{H}_t(\phi) = \mathcal{H}(\phi) + \frac{t}{2} \int d^d x \phi^2(x),$$

where t , the coefficient of ϕ^2 , characterizes the deviation from the critical temperature

$$t \propto T - T_c.$$

The renormalization theorem leads to the appearance of a new renormalization factor $Z_2(\Lambda/\mu, g)$ associated with the parameter t . By arguments of the same nature as in the critical theory, one derives a more general RG equation of the form (Zinn-Justin 1973)

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \frac{n}{2} \eta(g) - \eta_2(g) t \frac{\partial}{\partial t} \right] \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; t, g, \Lambda) = 0, \quad (13)$$

where a new RG function $\eta_2(g)$ related to $Z_2(\Lambda/\mu, g)$ appears.

These equations can be further generalized to deal with an external field (a magnetic field for magnetic systems) and the corresponding induced field expectation value (magnetization for magnetic systems). An RG equation for the equation of state follows.

Renormalized RG equations

For $d < 4$, if one is only interested in the leading scaling behaviour (and the first correction), it is technically simpler to use dimensional regularization and the renormalized theory in the so-called minimal (or modified minimal) subtraction scheme. Equation (10) is asymptotically symmetric between initial and renormalized correlations. One thus derives also (for the critical theory)

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \tilde{\beta}(g_r) \frac{\partial}{\partial g_r} + \frac{n}{2} \tilde{\eta}(g_r) \right] \tilde{W}_r^{(n)}(p_i, g_r, \mu) = 0$$

with the definitions

$$\tilde{\beta}(g_r) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{g_r}, \quad \tilde{\eta}(g_r) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{g_r} \ln Z(g_r, \varepsilon).$$

In this scheme, the renormalization constants (9) are obtained by going to low dimensions where the infinite Λ limit, at g_r fixed, can be taken. For example,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z(\Lambda/\mu, g) \Big|_{g_r \text{ fixed}} = Z(g_r, \varepsilon).$$

Then, order by order in powers of g_r , they have a Laurent expansion in powers of ε . In the minimal subtraction scheme, the freedom in the choice of the renormalization constants is used to reduce the Laurent expansion to the singular terms. For example, $Z(g_r, \varepsilon)$ takes the form

$$Z(g_r, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n(g_r)}{\varepsilon^n}$$

with $\sigma_n(g_r) = O(g_r^{n+1})$. A remarkable consequence is that the RG functions $\tilde{\eta}(g_r)$, and $\tilde{\eta}_2(g_r)$ when a ϕ^2 term is added, become independent of ε and $\tilde{\beta}(g_r)$ has the simple dependence

$$\tilde{\beta}(g_r) = -\varepsilon g_r + \tilde{\beta}_2(g_r),$$

where $\tilde{\beta}_2(g_r) = O(g_r^2)$ is also independent of ε .

Solution of the RG equations

RG equations can be solved by the method of characteristics. In the simplest example of the critical theory and equation (12), one introduces a scale parameter λ and two functions of $g(\lambda)$ and $\zeta(\lambda)$ defined by

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\beta(g(\lambda)), \quad g(1) = g, \quad \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln \zeta(\lambda) = -\eta(g(\lambda)), \quad \zeta(1) = 1. \quad (14)$$

The function $g(\lambda)$ is the effective amplitude of the ϕ^4 term at the scale λ . One verifies that equation (12) is then equivalent to

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\zeta^{n/2}(\lambda) \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda/\lambda) \right] = 0,$$

which implies

$$\tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \Lambda) = \zeta^{n/2}(\lambda) \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda/\lambda) \Rightarrow \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \lambda\Lambda) = \zeta^{n/2}(\lambda) \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda).$$

Here, the general Hamiltonian flow equation (1) reduces to the first equation (14) and the large distance behaviour is governed by the zeros of the function $\beta(g)$. When $\lambda \rightarrow \infty$, since $\beta(g) = -\varepsilon g + O(g^2)$, if $g > 0$ is initially very small, it moves away from the unstable Gaussian fixed point, in agreement with the general RG analysis at the Gaussian fixed point. If one assumes the existence of another zero g^* (an assumption that is confirmed by explicit calculations), then $g(\lambda)$ converges toward this fixed point. From the definition (7), one infers that $\tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}$ has dimension $(d - (d + 2)n/2)$. Therefore,

$$\tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i/\lambda; g, \Lambda) = \lambda^{(d+2)n/2-d} \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g, \lambda\Lambda) = \lambda^{(d+2)n/2-d} \zeta^{n/2}(\lambda) \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g(\lambda), \Lambda).$$

Since $g(\lambda)$ tends toward the fixed point value g^* , and if $\eta(g^*) \equiv \eta$ is finite, one finds the universal behaviour

$$\tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i/\lambda; g, \Lambda) \propto_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{(d+2-\eta)n/2-d} \tilde{W}_{\text{as.}}^{(n)}(p_i; g^*, \Lambda).$$

For the connected correlation functions in space, this result translates into

$$W_{\text{as.}}^{(n)}(\lambda x_i; g, \Lambda) \propto_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n(d-2+\eta)/2} W_{\text{as.}}^{(n)}(x_i; g^*, \Lambda),$$

for all x_i distinct.

The exponent $d_\phi = (d - 2 + \eta)/2$ is the **dimension of the field** ϕ , from the point of view of large distance properties.

Wilson's-Fisher fixed point: Epsilon-expansion

The Ising class fixed point

For practical RG calculations, it is more convenient to deal with vertex functions than connected correlation functions. The generating functional of vertex functions is obtained from the generating functional of connected functions by a Legendre transformation that generalizes the relation between free energy and thermodynamic potential. From the viewpoint of Feynman diagrams, vertex functions are one-line irreducible. For the two-point and four-point functions relevant here, the vertex functions $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ in Fourier representation above T_c are given by

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = 1/\tilde{W}^{(2)}(p), \quad \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \tilde{W}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) / \prod_{i=1}^4 \tilde{W}^{(2)}(p_i).$$

The RG equations satisfied by the asymptotic vertex functions are obtained from equations (12) or (13) by simply changing $\eta(g)$ into $-\eta(g)$.

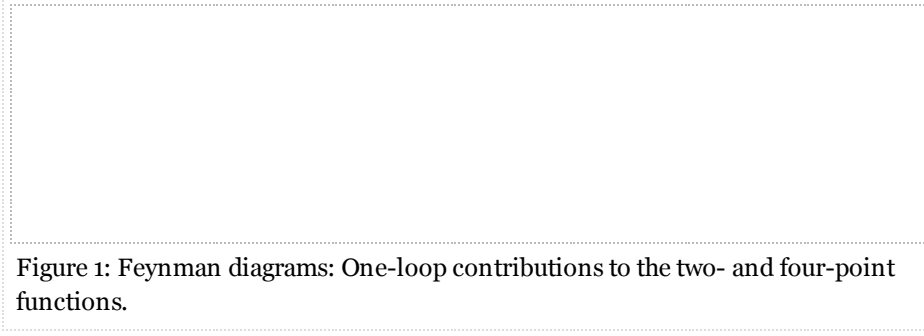


Figure 1: Feynman diagrams: One-loop contributions to the two- and four-point functions.

At order g , in the critical theory one finds that $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ is not modified, the order g contribution (first diagram of Figure 1) being a constant that only renormalizes the critical value $r_c = (\alpha_0)_c(g)\Lambda^2$:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, g, \Lambda) = p^2 + O(g^2).$$

Applying the RG equation, one obtains $\eta(g) = O(g^2)$. The four-point vertex function at order g^2 is then given by

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4, g, \Lambda) = \Lambda^\varepsilon g - \frac{1}{2}g^2[B_d(p_1 + p_2) + B_d(p_1 + p_3) + B_d(p_1 + p_4)] + O(g^3, g^2\varepsilon),$$

where (second diagram of Figure 1)

$$B_d(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \tilde{\Delta}(q)\tilde{\Delta}(p - q).$$

In the logic of the ε -expansion, at leading order one needs only B_4 . Without the cut-off Λ , the integral would then diverge logarithmically. For Λ large, it is thus dominated by

$$B_4(p) \sim \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{1 < |q| < \Lambda} \frac{d^4 q}{q^4} \sim N_4 \ln \Lambda$$

where N_d is the loop factor,

$$N_d = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}, \quad (15)$$

which, at higher orders, it is convenient not to expand in powers of ε . Then,

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4, g, \Lambda) = g + g\varepsilon \ln \Lambda - \frac{3}{2}g^2(\ln \Lambda + \text{finite}) + O(g^3, g^2\varepsilon, g\varepsilon^2).$$

$\tilde{\Gamma}^{(4)}$ satisfies an equation that can be inferred from equation (12),

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - 2\eta(g) \right] \tilde{\Gamma}_{\text{as.}}^{(4)}(p_i; g, \Lambda) = 0.$$

Applying it to the explicit expansion, one concludes

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{3}{16\pi^2} g^2 + O(g^3, \varepsilon g^2).$$

In the sense of an ε -expansion, $\beta(g)$ thus has a zero g^* with a positive slope (Wilson-Fisher's fixed point 1972),

$$g^* = 16\pi^2 \varepsilon / 3 + O(\varepsilon^2), \quad \omega = \beta'(g^*) = \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

which governs the large momentum behaviour of correlation functions. In addition, the exponent ω governs the leading correction to the critical behaviour.

Generalization

The results obtained for models with a \mathbb{Z}_2 reflection symmetry can easily be generalized to N -vector models with $O(N)$ group (rotations-reflections in N space dimensions) symmetry, which belong to different universality classes. Their universal properties can then be derived from an $O(N)$ symmetric field theory with an N -component field $\phi(x)$ and a $g(\phi^2)^2$ quartic term. Further generalizations involve theories with N -component fields but smaller symmetry groups, such that several independent quartic ϕ^4 terms are allowed. The structure of fixed points may then be more complicate.

Epsilon expansion: A few results

From the simple existence of the fixed point and of the corresponding ε -expansion, universal properties for a large class of critical phenomena can be proved to all orders in ε : this includes scaling relations between critical exponents, scaling behaviour of correlation functions or the equation of state... Moreover, universal quantities can be calculated as ε -expansions.

General results

An example of the general results that can be obtained is provided by the equation of state of magnetic systems, that is, the relation between applied magnetic field H , magnetization M and temperature T . In the relevant limit $|H| \ll 1$, $|T - T_c| \ll 1$, RG allows proving Widom's conjectured scaling form

$$H = M^\delta f((T - T_c)/M^{1/\beta}),$$

where $f(z)$ is a universal (up to normalizations) calculable (in an ε -expansion) function. Moreover, the exponents satisfy the relations

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}, \quad \beta = \frac{1}{2} \nu(d - 2 + \eta),$$

where ν , the correlation length exponent, given by

$$\nu = 1/(\eta_2(g^*) + 2),$$

characterizes the divergence ξ of the correlation length at T_c : $\xi \propto |T - T_c|^{-\nu}$.

Other relations can be derived, involving the magnetic susceptibility exponent γ characterizing the divergence of the two-point correlation function at zero momentum at T_c or the behaviour of the specific heat α :

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad \alpha = 2 - \nu d .$$

Note the relations involving the dimension d explicitly are not valid for the Gaussian fixed point.

Critical exponents as epsilon-expansions

We give here the results for all N -vector models, the results for the \mathbb{Z}_2 models being recovered by setting $N = 1$. Although the RG functions of the $(\phi^2)^2$ field theory are known to five-loop order and, thus, the critical exponents are known up to ε^5 , for illustration purpose we give here only two successive terms in the expansion, referring to the literature for higher order results. In terms of the variable $v = N_d g$ where N_d is the loop factor (15), the RG functions $\beta(v)$ and $\eta_2(v)$ at two-loop order, $\eta(v)$ at three-loop order are

$$\beta(v) = -\varepsilon v + \frac{(N+8)}{6}v^2 - \frac{(3N+14)}{12}v^3 + O(v^4), \quad :$$

$$\eta(v) = \frac{(N+2)}{72}v^2 \left[1 - \frac{(N+8)}{24}v \right] + O(v^4), \quad :$$

$$\eta_2(v) = -\frac{(N+2)}{6}v \left[1 - \frac{5}{12}v \right] + O(v^3).$$

The fixed point value solution of $\beta(v^*) = 0$ is then

$$v^*(\varepsilon) = \frac{6\varepsilon}{(N+8)} \left[1 + \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2}\varepsilon \right] + O(\varepsilon^3).$$

The values of the critical exponents

$$\eta = \eta(v^*), \quad \gamma = \frac{2 - \eta}{2 + \eta_2(v^*)}, \quad \omega = \beta'(v^*),$$

follow

$$\eta = \frac{\varepsilon^2(N+2)}{2(N+8)^2} \left[1 + \frac{(-N^2 + 56N + 272)}{4(N+8)^2}\varepsilon \right] + O(\varepsilon^4), \quad :$$

$$\gamma = 1 + \frac{(N+2)}{2(N+8)}\varepsilon + \frac{(N+2)}{4(N+8)^3} \left(N^2 + 22N + 52 \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad :$$

$$\omega = \varepsilon - \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Though this may not be obvious on these few terms, the ε -expansion is divergent for any $\varepsilon > 0$, as large order calculations based on instantons have shown. Extracting precise numbers from the known terms of the series requires a summation method. For example, adding simply the known successive terms for $\varepsilon = 1$ and $N = 1$ yields

$$\gamma = 1.000 \dots, 1.1666 \dots, 1.2438 \dots, 1.1948 \dots, 1.3384 \dots, 0.8918 \dots,$$

while the best field theory estimate is $\gamma = 1.2396 \pm 0.0013$.

Summation of the epsilon-expansion and numerical values of exponents

We display below (Table Figure 2) the results for some critical exponents of the $O(N)$ model obtained from Borel summation of the ε -expansion (Guida and Zinn-Justin 1998). Due to scaling relations like $\gamma = \nu(2 - \eta)$, $\gamma + 2\beta = \nu d$, only two among the first four are independent, but the series are summed independently to check consistency. $N = 0$ corresponds to statistical properties of polymers (mathematically the self-avoiding random walk), $N = 1$ to the Ising universality class, to liquid-vapour, binary mixtures or anisotropic magnet phase transitions. $N = 2$ describes the superfluid Helium transition, while $N = 3$ correspond to isotropic ferromagnets.



Figure 2: Critical exponents in $d = 3$ from Borel summed ε -expansion.

However, perturbative calculations directly in three dimensions, based on the RG formalism of Callan-Symanzik equations, as suggested initially by Parisi, have been extended to higher orders than the ε -expansion by Nickel and provided more precise results for critical exponents and the equation of state of the Ising model universality class. As a comparison, we thus also display (Table Figure 3) the best available field theory results obtained from Borel summation of $d = 3$ perturbative series (Guida and Zinn-Justin 1998).

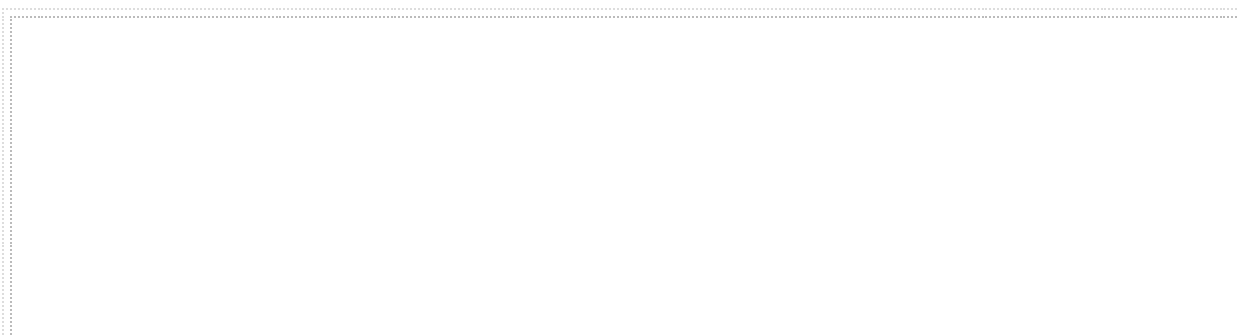


Figure 3: Critical exponents in $d = 3$ from Borel summed $d = 3$ perturbative series.

References

- Ashmore, J F (1972). *Nuovo Cimento Lett.* 4: 289.
- Avdeeva, G M and Migdal, A A (1972). *JETP Letters* 16: 178.
- Baker, G A; Nickel, B G; Green, M S and Meiron, D I (1976). Ising-Model Critical Indices in Three Dimensions from the Callan-Symanzik Equation. *Physical Review Letters* 36: 1351-1354. doi:10.1103/physrevlett.36.1351 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.36.1351>).
- , Baker; G A, Nickel and B G, Meiron (1978). Critical indices from perturbation analysis of the Callan-Symanzik equation. *Physical Review B* 17: 1365-1374.
- Bollini, C G and Giambiagi, J J (1972). Lowest order “divergent” graphs in ν -dimensional space. *Physics Letters B* 40: 566-568.
- Bollini, C G and Giambiagi, J J (1972). Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter. *Il Nuovo Cimento B* 12: 20-26.
- Brézin, E; Le Guillou, J C; Zinn-Justin, J and Nickel, B G (1973). Higher order contributions to critical exponents. *Physics Letters A* 44: 227-228. doi:10.1016/0375-9601(73)90894-3 ([http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(73\)90894-3](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(73)90894-3)).
- Brézin, E; Wallace, D J and Wilson, K G (1972). Feynman-Graph Expansion for the Equation of State near the Critical Point (Ising-like Case). *Physical Review Letters* 29: 591-594. doi:10.1103/physrevlett.29.591 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.29.591>).
- Brézin, E; Wallace, D J and Wilson, K G (1973). Feynman-Graph Expansion for the Equation of State near the Critical Point. *Physical Review B* 7: 232-239. doi:10.1103/physrevb.7.232 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.7.232>).
- Brézin, E; Le Guillou, J C and Zinn-Justin, J (1973). Wilson's Theory of Critical Phenomena and Callan-

- Symanzik Equations in 4 – ε Dimensions. *Physical Review D* 8: 434-440 . doi:10.1103/physrevd.8.434 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.8.434>) .; *ibidem*, (1974) Addendum to Wilson's theory of critical phenomena and Callan-Symanzik equations in 4 – ε dimensions. *Physical Review D* 9: 1121-1124.
- Callan, C G (1970). Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory. *Physical Review D* 2: 1541-1547. doi:10.1103/physrevd.2.1541 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.2.1541>) .
 - Chetyrkin, K G; Kataev, A L and Tkachov, F V (1981). Five-loop calculations in the $g\phi^4$ model and the critical index η . *Physics Letters B* 99: 147-150.
 - C, FORENAME1 (69-74). *Lettere Al Nuovo Cimento* 5 1972: Di Castro.
 - Gell-Mann, M and Low, F E (1954). Quantum Electrodynamics at Small Distances. *Physical Review* 95: 1300-1312.
 - Gorishny, S G; Larin, S A and Tkachov, F V (1984). ε --expansion for critical exponents: the $O(\varepsilon)^5$ approximation. *Physics Letters A* 101: 120-123.
 - Guida, R and Zinn-Justin, J (1998). Critical exponents of the N-vector model. *J. Phys. A: Math. Gen.* 31: 8103-8121. doi:10.1088/0305-4470/31/40/006 (<http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/31/40/006>) .
 - Kleinert, H; Neu, J; Schulte-Frohlinde, N; Chetyrkin, K G and Larin, S A (1991). Five-loop renormalization group functions of $O(n)$ – symmetric φ^4 -theory and ε -expansions of critical exponents up to ε^5 . *Physics Letters B* 272: 39-44. *ibidem* (1993) *Physics Letters B* 319: 545 (*erratum*).
 - Landau, L D (1937). Zur Theorie der Phasenumwandlungen I. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* 11: 26. , reprinted in *Collected Papers of Landau L D and ter Haar D eds.* (1965) Pergamon, New York ISBN-13: 978-0677205502.
 - Landau, L D (1937). [On the theory of phase transitions.](http://www.ujp.bitp.kiev.ua/papers/53SI08p.pdf) (<http://www.ujp.bitp.kiev.ua/papers/53SI08p.pdf>) *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 7: 19–32. , reprinted in *Collected Papers of Landau L D and ter Haar D eds.* (1965) Pergamon, New York ISBN-13: 978-0677205502.
 - Le Guillou, J C and Zinn-Justin, J (1977). Critical Exponents for the n-Vector Model in Three Dimensions from Field Theory. *Physical Review Letters* 39: 95-98.
 - Le Guillou, J C and Zinn-Justin, J (1980). Critical exponents from field theory. *Physical Review B* 21: 3976-3998.
 - Le Guillou, J C and Zinn-Justin, J (1985). Accurate critical exponents from the ε -expansion. *Journal de physique. Lettres* 46: 137-141.
 - Le Guillou, J C and Zinn-Justin, J (1987). Accurate critical exponents from field theory. *Journal de physique* 48: 19-24. *ibidem* (1989) 50: 1365-1370.
 - Mitter, P K (1973). Callan-Symanzik Equations and ε Expansions. *Physical Review D* 7: 2927-2942. doi:10.1103/physrevd.7.2927 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.7.2927>) .
 - Parisi, G (1980). Field-theoretic approach to second-order phase transitions in two- and three-dimensional systems. *Journal of Statistical Physics* 23: 49-82. doi:10.1007/bf01014429 (<http://dx.doi.org/10.1007/bf01014429>) .
 - Schroer, B (1973). Theory of Critical Phenomena Based on the Normal-Product Formalism. *Physical Review B* 8: 4200-4208.
 - Stueckelberg, E C G and Peterman, A (1953). *Helv. Phys. Acta* 26: 499-520.
 - Symanzik, K (1970). Small distance behaviour in field theory and power counting. *Communications in Mathematical Physics* 18: 227-246.
 - 't Hooft, G and Veltman, M (1972). Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B* 44: 189-213. doi:10.1016/0550-3213(72)90279-9 ([http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9)) .
 - Wegner, F J (1972). Corrections to Scaling Laws. *Physical Review B* 5: 4529-4536. doi:10.1103/physrevb.5.4529 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.5.4529>) .
 - Wegner, F J and Houghton, A (1973). Renormalization Group Equation for Critical Phenomena. *Physical Review A* 8: 401-412. doi:10.1103/physreva.8.401 (<http://dx.doi.org/10.1103/physreva.8.401>) .
 - Weinberg, S (1973). New Approach to the Renormalization Group *Physical Review D* 8: 3497-3509.

- Wilson, K G (1971). Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture *Physical Review B* 4: 3174-3183. doi:10.1103/physrevb.4.3174 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.4.3174>).
- Wilson, K G and Fisher, M E (1972). Critical Exponents in 3.99 Dimensions. *Physical Review Letters* 28: 240-243. doi:10.1103/physrevlett.28.240 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.28.240>).
- Wilson, K G (1972). Feynman-Graph Expansion for Critical Exponents. *Physical Review Letters* 28: 548-551. doi:10.1103/physrevlett.28.548 (<http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.28.548>).
- Zinn-Justin, J (1973). Wilson's theory of critical phenomena and renormalized perturbation theory. *Saclay preprint DPhT 73-79*: 1-50.

Internal references

- Edward Ott (2006) Basin of attraction. Scholarpedia, 1(8):1701.
- Peter McCullagh and John Kolassa (2009) Cumulants. Scholarpedia, 4(3):4699.
- James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.
- Gerard 't Hooft (2008) Gauge theories. Scholarpedia, 3(12):7443.
- Andrei D. Polyenin, William E. Schiesser, Alexei I. Zhurov (2008) Partial differential equation. Scholarpedia, 3(10):4605.
- Benjamin Widom (2009) Scaling laws. Scholarpedia, 4(10):9054.
- Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.

Further reading

- Bogoliubov, N N and Shirkov, D V (1980). Introduction to the theory of quantized fields (3rd edition). John Wiley, New York. ISBN 978-0471042235
- Collet, P and Eckmann, J (1978). A renormalization group analysis of the hierarchical model in statistical mechanics, Lecture Notes in Phys. 74. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Domb, C and Green, M S eds. (1976). Phase transitions and critical phenomena, volume 6. Academic Press, London. ISBN 0122203062, in particular the contributions: The critical state, general aspects, Wegner, F J; Field theoretical approach to critical phenomena, Brézin E, Le Guillou J C and Zinn-Justin J; The ϵ -expansion for exponents and the equation of state in isotropic systems, Wallace D J.
- Fisher, M E (1974). The renormalization group in the theory of critical behavior. *Rev. Mod. Phys.* 46: 597-616. doi:10.1103/revmodphys.46.597 (<http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.46.597>).
- Wilson, K G and Kogut, J B (1974). The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics Reports* 12: 75-199.
- Zinn-Justin, J (2002). Quantum Field Theory and Critical Phenomena (4th edition). Oxford University Press, Oxford. ISBN 0198509235
- Zinn-Justin, J (2005). Transitions de phase et groupe de renormalisation. EDP Sciences/CNRS Editions, Les Ulis. ISBN 2868837905; English version: Phase Transitions and Renormalization Group. Oxford University Press, Oxford 2007. ISBN 9780199227198

See also

Callan-Symanzik equation, Dimensional Renormalization, Gauge theories, Ising model, Quantum electrodynamics, Renormalization group, Renormalization group for non-relativistic fermions, Scaling laws.

Sponsored by: Dr. Riccardo Guida, Institut de Physique Théorique, CEA & CNRS, Gif-sur-Yvette, France

Reviewed by (http://www.scholarpedia.org/w/index.php?title=Critical_Phenomena:_field_theoretical_approach&oldid=73669)

: Prof. Igor Herbut, Simon Fraser University, Canada

Reviewed by (http://www.scholarpedia.org/w/index.php?title=Critical_Phenomena:_field_theoretical_approach&printable=yes)

[title=Critical_Phenomena:_field_theoretical_approach&oldid=75778](#)) : Anonymous

Accepted on: 2010-05-03 07:13:44 GMT ([http://www.scholarpedia.org/w/index.php?](http://www.scholarpedia.org/w/index.php?title=Critical_Phenomena:_field_theoretical_approach&oldid=75851)

[title=Critical_Phenomena:_field_theoretical_approach&oldid=75851](#))

Categories: Quantum and Statistical Field Theory | Statistical Field Theory

This page was last modified on 19 October 2013, at 20:30.



This page has been accessed 31,541 times.

"Critical Phenomena: field theoretical approach" by Jean Zinn-Justin is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. Permissions beyond the scope of this license are described in the Terms of Use